Devoir Maison n° 7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

23 avril 2018

Exercice 1

1. (a) C'est essentiellement évident : si on connait les deux premiers termes de la suite, alors on pourra calculer par récurrence double triviale chacun des termes suivants, et réciproquement on ne peut pas définir la suite sans connaitre ses deux premiers termes puisque ceux-ci peuvent être choisis librement.

   (b) La suite nulle vérifie la relation de récurrence ($0 - 0 + 0 = 0$, ça marche assez bien). Si (u_n) vérifie la relation, alors (λu_n) aussi (il suffit de multiplier la relation par λ), et si (v_n) est une deuxième suite vérifiant la même relation, en additionnant les deux égalités, on obtiendra immédiatement que $(u_n + v_n)$ est aussi une suite de F. L'ensemble F est donc bien un sous-espace vectoriel de E.

   (c) Ces deux suites sont bien définies de façon unique d'après les remarques faites à la première question. Elles forment une famille libre de façon évidente puisqu'elles ne sont pas proportionnelle : si $av_n + bw_n = 0$, on obtient immédiatement $a = 0$ en prenant $n = 0$ et $b = 0$ en posant $n = 1$. Le caractère générateur est moins évident. Soit (u_n) une suite appartenant à F, posons, pour tout entier n, $z_n = u_0 \times v_n + u_1 \times w_n$. La suite (z_n) appartient certainement à F puisqu'elle est combinaison linéaire des deux suites (v_n) et (w_n) qui sont donc F. De plus, par construction, $z_0 = u_0 \times 1 + u_1 \times 0 = u_0$, et de même $z_1 = u_1$. La suite (z_n) est donc une suite de F ayant les mêmes premiers termes que (u_n), elle est forcément égale à (u_n). Comme $(z_n) \in \text{Vect}((v_n), (w_n))$ par construction, on a bien prouvé que notre famille est génératrice de F, et donc une base de F. On en déduit immédiatement que $\dim(F) = 2$.

2. (a) Dans ce cas, la relation peut s'écrire $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n+2}}{2}$, ce qui est effectivement une définition possible des suites arithmétiques (c'est même l'origine du nom donné à ces suites : chaque terme de la suite est la moyenne arithmétique des deux termes qui l'entourent ; si on remplace cette condition par une moyenne géométrique, on obtient sans grande surprise des suites géométriques !). Une façon originale de faire : les suites arithmétiques vérifient en effet cette condition, puisque $u_n = u_0 + nr \Rightarrow u_n + u_{n+2} = 2u_0 + (2n + 2)r = 2u_{n+1}$, et l'espace vectoriel des suites arithmétiques est de dimension 2 (une suite arithmétique étant définie de façon unique par son premier terme et sa raison). Comme il est inclus dans F et que F est lui-même de dimension 2, on en déduit qu'ils sont égaux, et que les suites de F sont toutes les suites arithmétiques.

   (b) Il suffit d'écrire la condition, en remplaçant u_n par sa valeur : $pt^{k+2} - t^{k+1} + (1-p)t^k = 0$. On factorise par t^k (qui ne sera pas nul si on choisit un $t \neq 0$) pour obtenir immédiatement $pt^2 - t + 1 - p = 0$. L'équation du second degré obtenu admet pour discriminant $\Delta = 1 - 4p(1-p) = 4p^2 - 4p + 1 = (2p-1)^2$, et pour racines $t_1 = \dfrac{1 + 2p - 1}{2p} = 1$, et $t_2 = \dfrac{1 - 2p + 1}{2p} = \dfrac{1}{p} - 1$. Les deux suites $(v_n) = (1)$ (suite constante) et $(w_n) = \left(\left(\dfrac{1}{p} - 1\right)^n\right)$ appartiennent donc à F et, n'étant pas proportionnelles, forment une famille libre d'éléments de F. Comme F est de dimension 2, la famille $((u_n), (v_n))$ est donc une base de

F. Toute suite appartenant à F peut donc s'écrire sous la forme $u_n = A + B\left(\frac{1}{p} - 1\right)^n$. Notez qu'on vient ainsi de démontrer à l'aide d'espaces vectoriels un cas particulier du théorème sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (dont le cas général se démontre rigoureusement par la même méthode).

(c) On sait dans ce cas que (u_n) est une suite arithmétique, donc $u_n = u_0 + nr = 1 + nr$. La condition $u_i = 0$ implique $1 + ri = 0$, soit $r = -\frac{1}{i}$, et on en déduit que $u_n = 1 - \frac{n}{i}$.

(d) Cette fois-ci on sait que $u_n = A + Bx^n$. La première condition initiale (pour $n = 0$) se traduit par l'égalité $A + B = 1$, et la deuxième par $A + Bx^i = 0$. En soustrayant les deux, on a $B(1 - x^i) = 1$, soit $B = \frac{1}{1 - x^i}$, puis $A = 1 - B = -\frac{x^i}{1 - x^i}$. Finalement, $u_n = \frac{x^n - x^i}{1 - x^i}$.

3. (a) C'est exactement la même méthode, l'ensemble G est un sous-espace vectoriel de E de façon évidente en revenant à la définition. On définit ensuite trois suites appartenant à G de la façon suivante : $v_0 = 1$, $v_1 = v_2 = 0$ et les termes suivants de la suite (v_n) sont déterminés par la relation de récurrence définissant G ; $w_1 = 1$, $w_0 = w_2 = 0$ et de même $(w_n) \in G$; et enfin $t_0 = t_1 = 0$ et $t_2 = 1$ avec $(t_n) \in G$. Ces trois suites forment très clairement une famille libre de G, mais aussi une famille génératrice car toute suite (u_n) appartenant à G peut s'écrire $u_n = u_0v_n + u_1w_n + u_2t_n$ (exactement le même raisonnement qu'en 1.c). Du coup, (v, w, t) est une base de G, qui est un espace vectoriel de dimension 3.

(b) On copie cette fois-ci le raisonnement de la question 2.b : la suite géométrique de raison t est dans G si $4t^3 - 4t^2 - t + 1 = 0$. Or, cette équation se factorise sous la forme $4t^2(t-1) - (t-1) = 0$, soit $(t-1)(4t^2 - 1) = 0$. Elle admet pour solution $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{2}$ et $t_3 = -\frac{1}{2}$. Les trois suites $z_1 = (1)$, $z_2 = \left(\frac{1}{2^n}\right)$ et $z_3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ appartiennent donc à G. Elles forment par ailleurs une famille libre : si on suppose que $az_1 + bz_2 + cz_3 = 0$, alors on aura $a + b + c = 0$ (pour $n = 0$) ; $a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c = 0$ (pour $n = 1$) et $a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c = 0$ (pour $n = 2$). La soustraction des deux premières équations donne $\frac{1}{2}b + \frac{3}{2}c = 0$, la soutraction des deux dernières donne $\frac{1}{4}b - \frac{3}{4}c = 0$, ces deux conditions ne peuvent être vérifiées que si $b = c = 0$, et donc $a = 0$. Cette famille libre de trois suites dans un espace vectoriel de dimension 3 est nécessairement une base de G.

(c) Toute suite appartenant à G peut donc s'écrire sous la forme $u_n = A + \frac{B}{2^n} + \frac{C}{(-2)^n}$. Avec les conditions initiales données, et quitte à multiplier par 2 et 4 les deux dernières, on doit donc résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 1 \\ 2a & + & b & - & c & = & 5 \\ 4a & + & b & + & c & = & 7 \end{array}\right.$. Soustraire les deux équations extrêmes donne immédiatement $3a = 6$, soit $a = 2$. On a ensuite $b + c = -1$ et $b - c = 1$, dont on déduit facilement que $b = 0$ et $c = -1$. Autrement dit, $u_n = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 2 (bac S 1994)

I. Étude d'une suite implicite.

1. Les fonctions g_n sont définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Elles sont par ailleurs strictement croissantes sur cet intervalle comme sommes de fonctions croissantes. Le calcul des limites ne

pose aucune difficulté puisqu'il n'y a pas de forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to 0} g_n(x) = -\infty$ (sauf dans le cas très particulier où $n = 0$, qui aurait logiquement du être éliminé par l'énoncé, où la fonction affine $g_0 : x \mapsto x$ est bien entendu définie sur $\mathbb{R}$), et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$. Puisqu'on nous le demande, dressons donc un tableau de variations sans intérêt :

x	0		$+\infty$
			$+\infty$
g_n	‖	$\nearrow$	
	‖ $-\infty$		

2. La fonction g_n étant bijective de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, l'équation admet effectivement une solution unique. En supposant $n \neq 0$, on a $g_n(1) = 1 - n \leqslant 0$, et $g_n(e^2) = e^2 - n + \dfrac{n}{2} \times 2 = e^2 > 0$, donc, par croissance de la fonction g_n, $1 \leqslant u_n < e^2$.
3. Par définition, $g_n(u_n) = 0$, donc $u_n - n + \dfrac{n}{2}\ln(u_n) = 0$, donc $\dfrac{n}{2}\ln(u_n) = n - u_n$ et $\ln(u_n) = 2 - \dfrac{2}{n}u_n$.
4. Calculons donc $g_{n+1}(u_n) = u_n - n - 1 + \dfrac{n+1}{2}\ln(u_n) = n - \dfrac{n}{2}\ln(u_n) - n - 1 + \dfrac{n+1}{2}\ln(u_n) = \dfrac{1}{2}\ln(u_n) - 1$. Or, on sait que $u_n < e^2$, donc $\dfrac{1}{2}\ln(u_n) < 1$, et $g_{n+1}(u_n) < 0$. Comme par définition $g_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, on a donc $g_{n+1}(u_n) < g_{n+1}(u_{n+1})$ et, par croissance de la fonction g_n, $u_n < u_{n+1}$, ce qui prouve que la suite (u_n) est strictement croissante.
5. La suite étant croissante et majorée par e^2, elle converge certainement. De plus, $0 \leqslant \dfrac{2}{n}u_n \leqslant \dfrac{2e^2}{n}$, donc, en appliquant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n}u_n = 0$. La relation démontrée plus haut implique alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 2$, donc que (u_n) converge vers e^2.
6. En reprenant la relation de la question 3 (et connaissant la limite de la suite), on peut maintenant écrire que $\ln(u_n) = 2 - \dfrac{2e^2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, soit $u_n = e^{2-\frac{2e^2}{n}+o(\frac{1}{n})} = e^2 \times e^{-\frac{2e^2}{n}+o(\frac{1}{n})}$. Un développement limité à l'ordre 1 de l'exponentielle de droite (ce qui se trouve à l'intérieur a une limite nulle) donne alors $u_n = e^2\left(1 - \dfrac{2e^2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = e^2 - \dfrac{2e^4}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, soit si on préfère $e^2 - u_n \sim \dfrac{2e^4}{n}$.

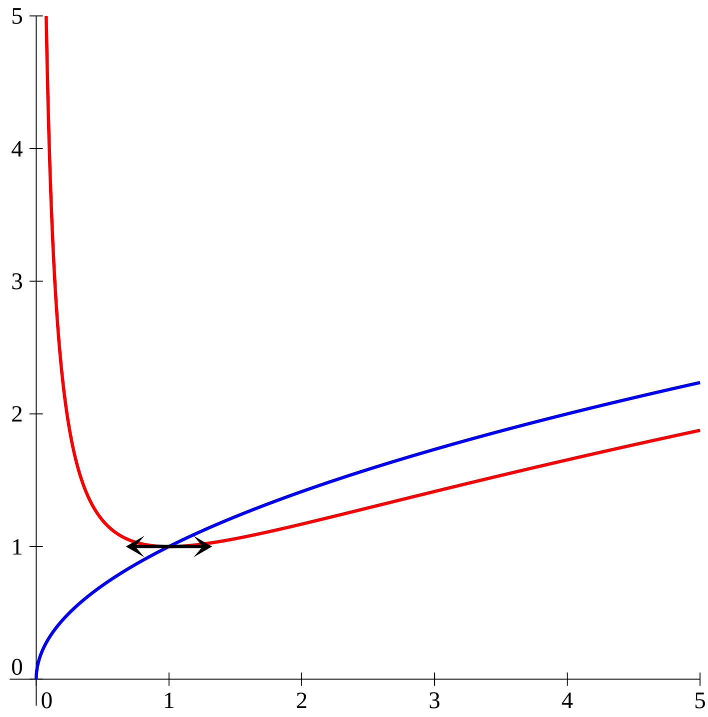
   Pour obtenir mieux, on reprend le calcul précédent à un ordre supérieur : $u_n = e^2 \times e^{-\frac{2e^2}{n}+\frac{4e^4}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})}$, soit $\dfrac{u_n}{e^2} = 1 - \dfrac{2e^2}{n} + \dfrac{4e^4}{n^2} + \dfrac{2e^4}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ en effectuant le DL de l'exponentielle à l'ordre 2. On en déduit donc que $u_n = e^2 - \dfrac{2e^4}{n} + \dfrac{6e^6}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
7. Il ne reste plus qu'un calcul pour terminer : $\dfrac{u_n}{e^2} = e^{-\frac{2e^2}{n}+\frac{4e^4}{n^2}-\frac{12e^6}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})} = 1 - \dfrac{2e^2}{n} + \dfrac{4e^4}{n^2} - \dfrac{12e^6}{n^3} + \dfrac{2e^4}{n^2} - \dfrac{8e^6}{n^3} - \dfrac{8e^6}{6n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ en poussant cette fois le DL à l'ordre 3 (et en n'oubliant pas bien entendu le double produit dans le développement du carré). Conclusion de ce palpitant calcul : $u_n = e^2 - \dfrac{2e^4}{n} + \dfrac{6e^6}{n^2} - \dfrac{64e^8}{3n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

II. Étude d'une fonction.

1. Il n'y a aucune difficulté en 0 : le numérateur a pour limite $+\infty$ et le dénominateur tend vers 0 en restant positif, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$. En $+\infty$, on peut écrire $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}$. Par croissance comparée classique, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. La fonction f est dérivable sur son intervalle de définition, de dérivée (en reprenant l'expression donnée dans la première question) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{\frac{2\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}}{4x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2 - \ln(x)}{4x\sqrt{x}} = \dfrac{2x - 2 + \ln(x)}{4x\sqrt{x}} = \dfrac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}$.
3. Le dénominateur de l'expression obtenue à la question précédente est bien entendu positif sur $]0, +\infty[$, donc $f'(x)$ est du signe de $g_1(x)$. On a vu dans la première partie que cette dernière fonction était négative sur $]0, u_1]$ et positive sur $[u_1, +\infty[$, mais ici on est tout à fait capable de calculer la valeur de u_1, puisqu'on a manifestement $g_1(1) = 0$, donc $u_1 = 1$. Ne reste plus qu'à calculer $f(1) = \dfrac{2}{2} = 1$, et à dresser le tableau :

x	0		1		$+\infty$
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4. On a déjà signalé plusieurs fois que $f(x) - \sqrt{x} = -\dfrac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}$, et on a même déjà donné la limite (nulle) de cette expression. La courbe représentative de f se rapprochera donc de celle de la racine carrée en $+\infty$ (on ne peut pas parler d'asymptote au sens classique du terme puisqu'il ne s'agit bien entendu pas d'une droite).
5. Pour obtenir ces positions relatives, on étudie le signe de $-\dfrac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}$, qui est simplement de signe opposé à celui de $\ln(x)$. La courbe est donc au-dessus de $\mathcal{C}_0$ sur $]0, 1[$, coupe $\mathcal{C}_0$ au point de coordonnées $(1, 1)$, et se trouve en-dessous ensuite.
6. Voici une allure (avec $\mathcal{C}$ en rouge et $\mathcal{C}_0$ en bleu, le rapprochement des deux courbes à l'infini n'est pas flagrant car la convergence vers 0 de la différence est lente) :



III. Étude d'une suite.

1. Toujours en utlisant la forme $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}$, on peut séparer le calcul en deux parties : $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \sqrt{x}\ dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}$. Pour la deuxième partie, on va effectuer une IPP en posant $u(x) = \ln(x)$, donc $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ qui donne par exemple $v(x) = \sqrt{x}$. On calcule alors $I_2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}\ dx = [\ln(x)\sqrt{x}]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx =$ $\ln(2)\sqrt{2} - [2\sqrt{x}]_1^2 = \ln(2)\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2$. Finalement, $I = I_1 - I_2 = \left(\dfrac{10}{3} - \ln(2)\right)\sqrt{2} - \dfrac{8}{3}$. Une valeur qu'on qualifiera généreusement de pas vraiment sympathique.
2. La fonction f est croissante sur $[1, +\infty[$, donc, si $k \geqslant 0$, elle l'est également sur l'intervalle $\left[1 + \dfrac{k}{n}, 1 + \dfrac{k+1}{n}\right]$. On peut donc écrire, pour tout x appartenant à cet intervalle, que $f\left(1 + \dfrac{k}{n}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(1 + \dfrac{k+1}{n}\right)$. Il suffit alors d'intégrer cet encadrement sur l'intervalle en question pour obtenir celui de l'énoncé (les facteurs $\dfrac{1}{n}$ correspondant simplement à la largeur de l'intervalle pour les deux intégrales extrêmes qui sont des intégrales de constantes).
3. On additionne les encadrements précédents pour toutes les valeurs de k comprises entre 0 et $n-1$. Au milieu, la relation de Chasles donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)\ dx = \int_1^2 f(x)\ dx = I$. La somme de gauche va s'écrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) = S_n - \frac{f(2)}{n}$ (il ne manque que le terme numéro n pour reconnaitre S_n, et ce dernier est bien égal à $\dfrac{f(2)}{n}$). De même à droite

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) = S_n - \frac{f(1)}{n}$$ avec un petit changement d'indice.

On déduit de ce nouvel encadrement que $I + \dfrac{f(1)}{n} \leqslant S_n \leqslant I + \dfrac{f(2)}{n}$, et une application directe du théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = I$.

4. Il s'agit en fait d'un calcul de somme de Riemann, au simple détail près qu'on a $n+1$ termes dans la somme au lieu d'en avoir n, ce qui ne change bien sûr pas la limite après la division par n.