Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 7

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre le 23 avril 2018

Les deux exercices constituant ce devoir sont extraits de sujets de bac à peine modifiés (les questions ajoutées sont celles qui sont écrites en gras). Bref, rien que du quasiment trivial pour se reposer pendant les vacances.

Exercice 1 (bac C 1975)

On considère l'ensemble E de toutes les suites réelles, muni de sa structure d'espace vectoriel usuelle. Il est interdit dans tout l'exercice d'avoir recours à la moindre connaissance sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

1. Soit $p \in]0,1[$ un nombre réel fixé. On note F l'ensemble des suites (u_n) de E vérifiant la relation de récurrence $pu_{n+2} - u_{n+1} + (1-p)u_n = 0$ pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer qu'une suite de F est définie par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1.
   (b) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (c) Soit $v = (v_n)$ l'unique suite de F vérifient $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$; et $w = (w_n)$ l'unique suite de F vérifiant $w_0 = 0$ et $w_1 = 1$. Vérifier que (v, w) est une famille libre de F, puis qu'elle est génératrice de F. En déduire la dimension de l'espace vectoriel F.
2. (a) Vérifier que, si $p = \dfrac{1}{2}$, les suites de F sont des suites arithmétiques.
   (b) On suppose $p \neq \dfrac{1}{2}$. Montrer que la suite géométrique $t \mapsto t^k$ est dans F si et seulement si $pk^2 - k + 1 - p = 0$. En déduire l'existence d'une base de F formée de suites géométriques, et en déduire une expression générale de toutes les suites de F.
   (c) Soit i un entier fixé supérieur ou égal à 1. On cherche à déterminer une suite $u = (u_n)$ de F vérifiant $u_0 = 1$ et $u_i = 0$. Dans le cas où $p = \dfrac{1}{2}$, exprimer le terme général de la suite u en fonction de n et de i.
   (d) Dans le cas où $p \neq \dfrac{1}{2}$, exprimer de même le terme général de u en fonction de n, de i et de $x = \dfrac{1-p}{p}$.
3. **On considère désormais l'ensemble G des suites de E vérifiant la relation de récurrence $4u_{n+3} - 4u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0$.**
   (a) **Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de E de dimension 3 (on pourra s'inspirer de la première question de l'exercice).**
   (b) **Déterminer les suites géométriques appartenant à G, et en déduire une base de G constituée de telles suites.**
   (c) **En déduire la forme générale des suites appartenant à G. Déterminer l'unique suite (u_n) de G vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{5}{2}$ et $u_2 = \dfrac{7}{4}$.**

Exercice 2 (bac S 1994)

Pour tout entier naturel n, on note g_n la fonction $x \mapsto x - n + \frac{n}{2}\ln(x)$.

I. Étude d'une suite implicite.

1. Dresser le tableau de variations complet de la fonction g_n.
2. En déduire l'existence d'un unique réel u_n tel que $g_n(u_n) = 0$, et montrer que $1 \leqslant u_n < e^2$.
3. Montrer que $\ln(u_n) = 2 - \frac{2}{n}u_n$.
4. Exprimer $g_{n+1}(u_n)$ en fonction de u_n et de n, et en déduire la monotonie de la suite (u_n).
5. Montrer que la suite (u_n) converge, et calculer sa limite en vous aidant de la relation de la question 3.
6. **En notant l la limite de la suite (u_n), déterminer un équivalent simple de $l - u_n$, puis effectuer un développement asymptotique à trois termes de u_n.**
7. **Comme vous avez adoré la question précédente, trouvez en fait un développement asymptotique à quatre termes de u_n, ce sera plus rigolo.**

II. Étude d'une fonction.

On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x - \ln(x)}{2\sqrt{x}}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ (on exprimera le résultat en fonction de $g_1(x)$).
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \sqrt{x})$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
5. Préciser les positions relatives de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f, et de celle $\mathcal{C}_0$ de la fonction racine carrée.
6. Tracer dans un même repère ces deux courbes.

III. Étude d'une suite.

On note désormais $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.

1. On note $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\, dx$. Calculer I.
2. En utilisant les variations de la fonction f, montrer que, si $0 \leqslant k \leqslant n-1$, alors $$\frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)\, dx \leqslant \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right).$$
3. En déduire que $S_n - \dfrac{f(2)}{n} \leqslant I \leqslant S_n - \dfrac{f(1)}{n}$, puis en déduire rigoureusement la limite de la suite (S_n).
4. **Quel résultat du cours nous aurait permis d'obtenir ce même résultat plus rapidement ?**