

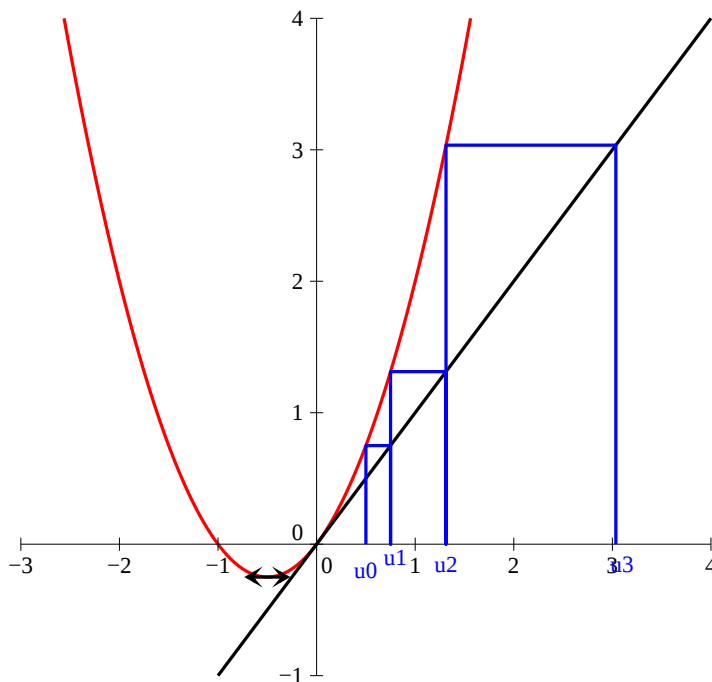
Devoir Maison n° 6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

8 mars 2018

Étude dans le cas où $u_0 \in \mathbb{R}$.

1. La fonction f est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 1 + 2x$. Cette dérivée s'annule pour $x = -\frac{1}{2}$, où f admet un minimum de valeur $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$. De plus, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, et $f(x) - x = x^2$ est toujours positif, la courbe sera donc toujours située au-dessus de la droite d'équation $y = x$, avec un point d'intersection à l'origine du repère. Lorsque $u_0 = \frac{1}{2}$, on peut calculer $u_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; $u_2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{16} = \frac{21}{16}$ et $u_3 = \frac{21}{16} + \frac{441}{256} = \frac{777}{256} \simeq 3$, et tracer la courbe demandée :



2. Commençons par signaler que l'intervalle $\left[-\frac{1}{4}, 0\right]$ est stable par f : en effet, f est croissante sur cet intervalle, $f\left(-\frac{1}{4}\right) \geq -\frac{1}{4}$ d'après l'étude de signe de $f(x) - x$ (même pas la peine de calculer la valeur exacte), et $f(0) = 0$. On prouve alors par récurrence triviale que tous les termes de la suite sont compris entre $-\frac{1}{4}$ et 0 : c'est le cas pour u_0 par hypothèse, et $u_n \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right] \Rightarrow u_{n+1} \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right]$ par stabilité de l'intervalle. La suite (u_n) est donc bornée, et croissante puisque $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n^2 \geq 0$ (la suite (u_n) sera d'ailleurs croissante quelle que soit la valeur de u_0), elle converge nécessairement (puisque'elle est en particulier majorée par 0). Comme il s'agit d'une suite récurrente, elle ne peut converger que vers un

point fixe de la fonction f , qui n'en a qu'un seul, en l'occurrence 0. On en déduit donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Si $u_0 > 0$, la suite est toujours croissante, mais ne peut converger vers 0 puisqu'elle sera minorée par son premier terme u_0 qui est par hypothèse strictement positif. Comme 0 est le seul point fixe de f , la suite ne peut pas converger. Comme est croissante, elle diverge alors nécessairement vers $+\infty$.

3. C'est en fait la même chose qu'à la question précédente : l'intervalle $[-1, 0]$ est stable par f (puisque la fonction y est décroissante puis croissante, avec un minimum égal à $-\frac{1}{4}$, et que $f(-1) = f(0) = 0$), donc tous les termes de la suite appartiendront à $[-1, 0]$ si $u_0 \in \left[-1, -\frac{1}{4}\right]$. La suite sera alors croissante et majorée et convergera nécessairement vers 0. Au contraire, si $u_0 < -1$, on aura $u_1 > 0$, et, à l'exception de son premier terme, la suite sera minorée par $u_1 > 0$ et divergera nécessairement vers $+\infty$. Notons en passant que $u_0 = -1$ est la seule valeur pour laquelle la suite est stationnaire (on aura toujours $u_n = 0$ à partir du rang 1), et $u_0 = 0$ est bien sûr la seule valeur pour laquelle la suite est constante.

Vitesse de convergence lorsque $u_0 \in]-1, 0[$.

1. On va bien sûr procéder par récurrence. La propriété au rang 0 s'énonce $-1 < u_0 < 0$, ce qui est exactement l'hypothèse effectuée. L'intervalle $] -1, 0[$ étant stable par f , l'hypothèse de récurrence implique facilement que $u_{n+1} < 0$. De plus, si $n = 0$, on a $u_1 \geq -\frac{1}{4} > -\frac{1}{2}$ puisque la fonction f est minorée par $-\frac{1}{4}$, donc l'hérédité est prouvée lorsque $n = 0$. Si $n \geq 1$, la fonction f est strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{n+1}, 0\right]$, donc l'hypothèse $-\frac{1}{n+1} < u_n$ implique $u_{n+1} > f\left(-\frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{n}{(n+1)^2}$. Or, $\frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)} > 0$, donc $-\frac{n}{(n+1)^2} \geq -\frac{1}{n+2}$, et on peut déduire du calcul précédent que $u_{n+1} > -\frac{1}{n+2}$, ce qui achève notre récurrence.
2. Calculons donc $v_{n+1} - v_n = (n+1)u_{n+1} - nu_n = (n+1)(u_n + u_n^2) - nu_n = u_n + (n+1)u_n^2 = u_n(1 + (n+1)u_n)$. Or, $u_n < 0$ d'après la question précédente, et $(n+1)u_n > -1$, donc $1 + (n+1)u_n > 0$. On a donc $v_{n+1} - v_n < 0$, la suite (v_n) est bien décroissante. De plus, toujours d'après la question précédente, on a $-\frac{n}{n+1} < v_n < 0$, donc a fortiori $-1 < v_n < 0$. La suite est donc décroissante et minorée par -1 , elle converge nécessairement vers une limite appartenant à $[-1, 0[$ (0 exclus car (v_n) est majorée à partir du rang 1 par son terme $v_1 = u_1 < 0$).
3. En reprenant le calcul déjà effectué plus haut, $w_n = nu_n(1 + nu_n + u_n) = v_n(1 + u_n + v_n)$. Comme (u_n) converge vers 0 et (v_n) vers l , le résultat demandé est immédiat.
4. Supposons donc que n est au moins égal au rang à partir duquel $a_{n+1} - a_n \geq \frac{k}{n}$. On peut alors écrire (somme télescopique) $a_{2n} - a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n+i+1} - a_{n+i}$. Or, chacun des termes de cette sommes est par hypothèse minoré par $\frac{k}{n+1}$, qui est lui-même toujours plus grand que $\frac{k}{2n}$ quand $i \leq n-1$. On en déduit que $a_{2n} - a_n \geq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{k}{2n} = \frac{nk}{2n} = \frac{k}{2}$. Si la suite (a_n) ne diverge pas vers $+\infty$, comme elle est croissante, c'est qu'elle converge vers une limite μ . Mais alors

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} - a_n = \mu - \mu = 0$, ce qui est difficilement compatible avec le fait que $a_{2n} - a_n$ est minoré par une constante strictement positive $\frac{k}{2}$. On a donc nécessairement $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

- Supposons donc, par l'absurde, que $l \neq -1$, alors $l(1+l) = \alpha$ est une constante strictement négative. À partir d'un certain rang, on aura nécessairement $w_n < \frac{\alpha}{2}$ (en revenant à la définition de la limite), donc $v_{n+1} - v_n < \frac{\alpha}{2n}$. En posant $a_n = -v_n$ et $k = -\frac{\alpha}{2}$, la suite (a_n) vérifie les hypothèses de la question précédente, et diverge donc vers $+\infty$. C'est très gênant, puisque cela implique que (v_n) tend vers $-\infty$, alors qu'elle est minorée par -1 . L'hypothèse est donc absurde, et $l = -1$.

Étude dans le cas où $u_0 \in \mathbb{C}$, avec $|u_0| \geq 2$.

- C'est une application triviale de l'inégalité triangulaire $|z| \geq |z + z'| - |z'|$, avec $z = a + 1$ et $z' = -1$. Il y aura égalité si et seulement si $a + 1$ et -1 sont alignés sur une même demi-droite dans le plan complexe (pour que l'inégalité triangulaire soit une égalité), et si $|a| = 2$ (pour que la minoration de $|a|$ par 2 soit aussi une égalité). On doit donc avoir $a + 1 = -\lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$, soit $a = -1 - \lambda$, ce qui ne peut avoir un module égal à 2 que si $\lambda = -1$, auquel cas $a = -2$.
- On sait que $|u_{n+1}| = |u_n + u_n^2| = |u_n| \times |1 + u_n|$. La question précédente permet alors d'affirmer que, par une récurrence triviale, on aura toujours $|u_n| \geq 2$ et $|u_{n+1}| \geq |u_n|$. En particulier, $|u_n|$ sera toujours supérieur ou égal à 2, et si $|u_n| > 2$ pour un entier n donné, alors tous les modules suivants seront aussi strictement supérieurs à 2. Or, la première question prouve que $|u_1| > 2$ sauf si $u_0 = -2$. Si $u_0 \neq -2$, l'inégalité $|u_n| > 2$ est donc vérifiée à partir du rang 1, et si $u_0 = -2$, alors $u_1 = -2 + 4 = 2$ et $u_2 = 2 + 4 = 6$ a un module strictement supérieur à 2, ce qui prouve que dans tous les cas l'inégalité stricte sera vérifiée à partir du rang 2.
- Il suffit décrire que $|u_n + 1| \geq |u_n| + 1 \geq |u_1| + 1 = 1 + k$ (la première inégalité découle de l'inégalité triangulaire, comme à la première question de cette partie) pour déduire du calcul de la question précédente que $|u_{n+1}| = |u_n| \times |1 + u_n| \geq (1 + k)|u_n|$. La suite $(|z_n|)$ est donc minorée (à partir du rang 1), par une suite géométrique de raison strictement supérieure à 1 qui a donc pour limite $+\infty$. On en déduit immédiatement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$.

Étude de l'ensemble des valeurs de $u_0 \in \mathbb{C}$ pour lesquelles (u_n) converge.

- Calculons donc $u_{n+1} = (a_n + ib_n)^2 + a_n + ib_n = a_n^2 + 2ia_nb_n - b_n^2 + a_n + ib_n = a_n^2 - b_n^2 + a_n + ib_n(2a_n + 1)$. On en déduit que $a_{n+1} = a_n^2 - b_n^2 + a_n$ et $b_{n+1} = b_n(1 + 2a_n)$.
- Supposons donc que $z = a + ib \in R$, alors d'après la question précédente $f(z)$ a pour partie imaginaire $b(2a + 1)$. Or, $-1 \leq a \leq 0 \Rightarrow -1 \leq 2a + 1 \leq 1$, donc $|b(2a + 1)| \leq |b| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. De plus, l'étude de la fonction f effectuée en tout début de devoir assure que $-\frac{1}{4} \leq a^2 + a \leq 0$, et comme $0 \leq b^2 \leq \frac{3}{4}$, on en déduit que $-\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \leq a^2 + a - b^2 \leq 0$, exactement ce qu'on veut pour avoir $f(z) \in R$. Si on suppose au départ les inégalités strictes, on aura $|2a + 1| < 1$, ce qui assure une inégalité stricte pour $|b(2a + 1)|$. Et on aura par ailleurs $-\frac{1}{4} \leq f(a) < 0$ (attention, l'inégalité à gauche reste large) et $-\frac{3}{4} < -b^2 \leq 0$ (là encore, une seule inégalité stricte), ce qui donne bien deux inégalités strictes à l'arrivée, donc $f(z) \in \overset{\circ}{R}$. Pour que l'image d'un élément du bord reste au bord, il faut qu'au moins une des inégalités reste large. On doit donc avoir $2a + 1 = \pm 1$, soit $a = -1$ ou $a = 0$, et $b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ (l'inégalité sur la partie

imaginaire restera alors large) ; ou $a = -\frac{1}{2}$ avec $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; ou encore $a = -1$ ou $a = 0$ avec $b = 0$ (tous ces cas donnent une inégalité large pour la partie réelle). Vérifions ce qui se passe pour chacun des cas correspondants : si $z = \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $f(z) = -\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, et $f(f(z))$ est donc à l'intérieur du rectangle. Même chose lorsque $z = -\frac{i\sqrt{3}}{2}$. Si $z = -1 + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, on aura $f(z) = -1 + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{3}{4} - i\sqrt{3} = -\frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, dont l'image va à nouveau être à l'intérieur du rectangle. Idem lorsque $z = -1 - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Si $z = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $f(z) = -1$, donc $f(f(z)) = 0$ et la suite va alors stationner, tous les termes suivants étant égaux à 0. Les derniers cas $z = -1$ et $z = 0$ donnent encore plus rapidement des suites stationnaires. Dans tous les cas, $f(f(z))$ se trouve dans $\mathring{R}$ sauf si la suite stationne à 0, ce qui se produira de toute façon avant le rang 3. Par récurrence triviale, les termes suivant le terme numéro 3 seront aussi dans $\mathring{R}$ puisque l'ensemble est laissé stable par f .

3. On a déjà vu plus haut que $|b_{n+1}| = |b_n| \times |1 + 2a_n| \leq |b_n|$, donc la suite $(|b_n|)$ est décroissante et minorée par 0, elle converge nécessairement vers une limite vérifiant $0 \leq \lambda < \frac{\sqrt{3}}{2}$ (inégalité stricte à droite puisque les calculs de la question précédente assurent que $|b_n|$ ne peut pas rester constamment égal à $\frac{\sqrt{3}}{2}$).
4. Supposons par l'absurde que $\lambda > 0$, alors au moins à partir d'un certain rang $b_n \neq 0$, et $|1 + 2a_n| = \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}$ admet nécessairement pour limite 1 (puisque bien entendu $\lim_{n \rightarrow +\infty} |b_{n+1}| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |b_n| = \lambda$). Malheureusement, $1 + 2a_n$ est un réel dont on ne connaît pas le signe, mais son carré, lui, admet certainement pour limite 1, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + 4a_n + 4a_n^2 = 1$. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + a_n^2 = 0$. Mais alors $a_{n+1} = a_n + a_n^2 - b_n^2$ tend vers $-\lambda^2$ (b_n étant lui-même un réel de signe inconnu, son carré a la même limite que $|b_n|^2$), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\lambda^2$. Comme on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + a_n^2 = 0$, on en déduit que $-\lambda^2 + \lambda^4 = 0$, ce qui implique que $\lambda = 0$ ou $\lambda = \pm 1$. Avec les hypothèses effectuées, on devrait donc avoir $\lambda = 1$, ce qui est interdit par le fait que $\lambda < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Bref, on a nécessairement $\lambda = 0$.
5. Remarquons déjà que la suite (b_n^2) est décroissante, puisque $(|b_n|)$ l'est, donc $a_n + b_n^2 \leq a_n + b_{n-1}^2$ (si $n \geq 1$). Or, $a_n = a_{n-1} + a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2$, donc $a_n + b_n^2 \leq a_{n-1} + a_{n-1}^2$, qui est négatif puisque $a_{n-1} \in [-1, 0]$ (revoir l'étude de la fonction f si besoin). On peut alors écrire $|1 + u_n|^2 = |1 + a_n + ib_n|^2 = (1 + a_n)^2 + b_n^2 = 1 + (a_n + a_n^2) + (a_n + b_n^2)$. Les deux termes entre parenthèses étant négatifs, on a donc $|1 + u_n|^2 \leq 1$, donc $|1 + u_n| \leq 1$. Ceci suffit à prouver que la suite $(|u_n|)$ est décroissante (puisque $|u_{n+1}| = |1 + u_n| \times |u_n|$), et donc convergente (elle est trivialement minorée par 0).
6. D'après la question précédente, $(|u_n|^2)$ est une suite convergente, donc $(a_n^2 + b_n^2)$ converge. Comme b_n^2 converge également, on en déduit que (a_n^2) converge. Mais comme a_n est toujours négatif, la suite (a_n) elle-même est donc convergente (puisque l'on a $a_n = -\sqrt{a_n^2}$). On sait déjà que (b_n) converge, donc (u_n) converge (une suite complexe converge si et seulement si ses parties réelle et imaginaire convergent). Si (u_n) converge vers une certaine limite l , alors (u_{n+1}) aussi, et par passage à la limite, $l = l + l^2$, donc $l = 0$ (en fait, l'argument du point fixe pour les suites récurrentes reste valable pour une suite complexe).
7. Personne n'ayant jugé bon de s'intéresser aux questions subsidiaires, je ne les corrige pas (bon, je le ferai le jour où j'aurais rattrapé tout mon retard sur le reste des mises à jour du site).