# Devoir Maison n°6

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le jeudi 8 mars

## Problème

Dans tout ce problème, on s'intéresse à l'ensemble des suites $(u_n)$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

## Étude dans le cas où $u_0 \in \mathbb{R}$.

1. Étudier le plus complètement possible la fonction réelle $f : x \mapsto x+x^2$ (on donnera notamment le signe de $f(x) - x$) et tracer une allure de sa courbe représentative. On placera les premiers termes de la suite dans le cas où $u_0 = \dfrac{1}{2}$ (pensez à prendre une échelle permettant de voir quelque chose).
2. Montrer que, si $u_0 \in \left[-\dfrac{1}{4}, 0\right]$, alors $(u_n)$ converge vers 0. Montrer que, si $u_0 > 0$, alors $(u_n)$ diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. Déterminer la nature de $(u_n)$ lorsque $u_0 < -\dfrac{1}{4}$.

## Vitesse de convergence lorsque $u_0 \in ]-1, 0[$.

On suppose donc dans cette partie que $-1 < u_0 < 0$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $-\dfrac{1}{n+1} < u_n < 0$.
2. Montrer que la suite $(v_n)$ définie par $v_n = nu_n$ est croissante, puis que $(v_n)$ converge vers une limite $l \in [-1, 0[$.
3. Montrer que la suite $(w_n)$ définie par $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$ converge vers $l(1 + l)$.
4. Soit $(a_n)$ une suite croissante telle que $a_{n+1} - a_n \geq \dfrac{k}{n}$ à partir d'un certain rang, pour une constante $k > 0$. Montrer qu'on a alors (toujours à partir d'un certain rang) $a_{2n} - a_n \geq \dfrac{k}{2}$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.
5. Montrer par l'absurde, en utilisant la question précédente, que $l = -1$.

Le résultat obtenu prouve que la convergence de la suite est lente (en gros, $\dfrac{1}{n}$ ça se rapproche lentement de 0, et c'est à peu près pareil pour $u_n$).

## Étude dans le cas où $u_0 \in \mathbb{C}$, avec $|u_0| \geq 2$.

1. Montrer que, si $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| \geq 2$, alors $|1+a| \geq 1$, et déterminer pour quelles valeurs de $a$ cette inégalité est une égalité.
2. En déduire que, si $|u_0| \geq 2$, alors on aura pout tout entier $n \geq 2$, $|u_n| > 2$.
3. En posant $k = |z_1| - 2$, montrer que $|z_{n+1}| \geq (1+k)|z_n|$ si $n \geq 1$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = +\infty$.

## Étude de l'ensembles des valeurs de $u_0 \in \mathbb{C}$ pour lesquelles $(u_n)$ converge.

On note dans cette partie $R$ le rectangle constitué des points $z = a+ib$ du plan complexe vérifiant $-1 \leq a \leq 0$ et $|b| \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On notera $\overset{\circ}{R}$ l'intérieur de ce rectangle (c'est-à-dire l'ensemble défini par les mêmes conditions mais avec des inégalités strictes).

1. En notant $u_n = a_n + ib_n$ et $u_{n+1} = a_{n+1} + ib_{n+1}$, exprimer $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ en fonction de $a_n$ et de $b_n$.
2. Montrer que $R$ est stable par la fonction $f : z \mapsto z + z^2$ (définie pour tout nombre complexe $z$), et que $\overset{\circ}{R}$ est aussi stable par $f$. Quels sont les points situés au bord de $R$ dont l'image par $f$ n'est pas à l'intérieur de $R$ ? En déduire que, si $u_0 \in R$ (on gardera cette hypothèse pour la suite de la cette partie), $u_n$ appartiendra à $\overset{\circ}{R}$ à partir de $n = 3$, sauf si $u_3 = 0$, cas qu'on exclura pour la suite.
3. Montrer que la suite $|b_n|$ converge vers une limite $\lambda$ vérifiant $0 \leq \lambda < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
4. Montrer que $\lambda = 0$.
5. Montrer que la suite $(|u_n|)$ converge (on commencera par prouver que $x_n + y_n^2 \leq 0$ si $n \geq 1$).
6. Montrer que la suite $(u_n)$ converge. Que vaut sa limite ?
7. Première question subsidiaire : déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des nombres complexes $z$ pour lesquels $f(z) \in R$. Que peut-on dire de la suite si $u_0$ est dans cet ensemble ?
8. Deuxième question subsidiaire : tracer à l'aide de Python (ou du logiciel de votre choix, mais en expliquant dans tous les cas ce que vous avez fait) une allure de $R_n = \{z \in \mathbb{C} \mid f^n(z) \in R\}$, où on a bien entendu noté $f^n = f \circ \cdots \circ f$ la composée de $f$ par elle-même $n$ fois de suite. On essaiera de prendre des valeurs de $n$ de plus en plus grandes pour visualiser l'évolution de l'ensemble. On obtient ainsi une allure approchée de l'ensemble des valeurs $u_0$ pour lesquelles la suite converge. On pourra aussi s'amuser à tracer les ensembles $T_n = \{z \in \mathbb{C} \mid |f^n(z)| \geq 2\}$, dans lesquels la suite va diverger (avec un module qui tend vers $+\infty$).