Devoir Maison numéro 5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

8 février 2018

Problème

1. (a) Par définition, $\left(\frac{3}{2}\right)^{\underline{0}} = 1$. Ensuite, $\left(\frac{3}{2}\right)^{\underline{1}} = \frac{3}{2}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{\underline{2}} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{\underline{3}} = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{\underline{4}} = -\frac{3}{8} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{16}$; et enfin $\left(\frac{3}{2}\right)^{\underline{5}} = \frac{9}{16} \times \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{45}{32}$.

   (b) Si $k < n$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, donc l'un des termes du produit définissant $k^{\underline{n}}$ est égal à $k - k$, donc est nul. Du coup, le produit lui-même est évidemment nul.

   (c) Dans le cas contraire, on constate que $k^{\underline{n}} = \dfrac{k!}{(k-n)!}$ (on reconnait en passant la définition du nombre d'arrangements de n éléments dans un ensemble de cardinal k), donc $\dfrac{k^{\underline{n}}}{n!} = \dfrac{k!}{(k-n)!n!} = \dbinom{k}{n}$.

   (d) On calcule $(-1)^{\underline{n}} = \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} (-1-i) = \prod_{i=1}^{n} -i = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} i = (-1)^n n!$ via un tout simple décalage d'indice.

   (e) On peut encore démontrer ces deux relations assez évidentes à coups de décalages d'indices : $x \times (x-1)^{\underline{n}} = x \times \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} (x-1-i) = x \times \prod_{i=1}^{n} (x-i) = \prod_{i=0}^{n} (x-i) = x^{\underline{n+1}}$. La deuxième relation est carrément triviale, il suffit de rajouter le terme $(x-n)$ dans le produit, l'indice va alors jusqu'à n au lieu de s'arrêter à $n-1$ et c'est démontré.

   (f) D'après la question précédente (en décalant simplement les valeurs de n), on a $(x+1)^{\underline{n+1}} = (x+1) \times x^{\underline{n}}$, et par ailleurs $x^{\underline{n+1}} = (x-n) \times x^{\underline{n}}$ (là on n'a même pas décalé quoi que ce soit). En soustrayant ces deux égalités, on obtient bien $(x+1)^{\underline{n+1}} - x^{\underline{n+1}} = (x+1)x^{\underline{n}} - (x-n)x^{\underline{n}} = (n+1)x^{\underline{n}}$.

   (g) Dans la relation de la question précédente, remplaçons x par k et n par p (le n de la question précédente, celui de cette question n'a rien à voir) : $(p+1)k^{\underline{p}} = (k+1)^{\underline{p+1}} - k^{\underline{p+1}}$. On peut bien entendu additionner ces relation pour toutes les valeurs de k comprises entre 0 et n pour trouver $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (p+1)k^{\underline{p}} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{\underline{p+1}} - k^{\underline{p+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} k^{\underline{p+1}} - \sum_{k=0}^{n} k^{\underline{p+1}} = (n+1)^{\underline{p+1}} - 0^{\underline{p+1}}$ (on a en fait une simple somme télescopique à droite). Bien entendu, $0^{\underline{p+1}} = 0$, et on peut tout diviser par la constante $p+1$ pour obtenir $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^{\underline{p}} = \frac{(n+1)^{\underline{p+1}}}{p+1}$.

2. (a) On utilise simplement le fait que $k = k^{\underline{1}}$ et on applique la formule : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ comme on le sait depuis fort longtemps. Pour la somme des carrés, il faut ruser un

tout petit peu plus : $k^2 = k(k-1) + k = k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}}$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}} = \frac{(n+1)^{\underline{3}}}{3} + \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6}(2n-2+3) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, encore une formule bien connue !

(b) La question 1.c nous permet d'affirmer que $\displaystyle\binom{k}{p} = \frac{k^{\underline{p}}}{p!}$, donc $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \frac{1}{p!}\sum_{k=p}^{n} k^{\underline{p}} = \frac{1}{p!}\left(\sum_{k=0}^{n} k^{\underline{p}} - \sum_{k=0}^{p-1} k^{\underline{p}}\right) = \frac{1}{p!} \times \frac{(n+1)^{\underline{p+1}} - p^{\underline{p+1}}}{p+1} = \frac{(n+1)^{\underline{p+1}}}{(p+1)!} = \binom{n+1}{p+1}$ en reprenant les résultats des questions b et c. Ce résultat classique peut aussi très bien se démontrer par une récurrence directe.

3. (a) Il faut et il suffit que tous les nombres $x+i$ du produit au dénominateur soient non nuls, donc que x ne soit pas un entier strictement négatif compris entre $-n$ et -1.

(b) On peut procéder comme dans la première partie : $\displaystyle x^{\underline{-n-1}} = \frac{x^{\underline{-n}}}{x+n+1}$ (de façon triviale), et $\displaystyle x^{\underline{-n-1}} = \frac{1}{(x+1)\prod_{i=2}^{n+1}(x+i)} = \frac{1}{(x+1)\prod_{i=1}^{n}(x+1+i)} = \frac{(x+1)^{\underline{-n}}}{x+1}$. Ensuite, on constate que $(x+1)^{\underline{-n}} - x^{\underline{-n}} = (x+1)x^{\underline{-n-1}} - (x+n+1)x^{\underline{-n-1}} = -nx^{\underline{-n-1}}$. En posant $p = -n-1$, on trouve donc $(p+1)x^{\underline{p}} = (x+1)^{\underline{p+1}} - x^{\underline{p+1}}$, c'est exactement la formule de la question 1.f.

4. (a) Commençons par signaler que la relation démontrée à la question 1.g reste valable pour des entiers p négatifs, puisqu'elle peut se démontrer exactement de la même façon à partir de notre généralisation de la question 1.f (bien entendu, l'entier n, lui, doit rester naturel pour que la somme ait un sens). Bon, en fait , ça ne sert à rien pour cette question-ci.

On peut écrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+n)} = \sum_{k=0}^{n} k^{\underline{-n}}$, puis exploiter la relation de la question 1.f : $\displaystyle k^{\underline{-n}} = \frac{1}{-n+1}((k+1)^{\underline{-n+1}} - k^{\underline{-n+1}})$. On peut additionner ces relations pour effectuer un télescopage : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^{\underline{-n}} = \frac{1}{1-n}(\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\underline{1-n}} - 0^{\underline{1-n}}) = \frac{(n+1)^{\underline{1-n}} - 0^{\underline{1-n}}}{1-n}$. Or, en supposant bien sûr $n > 0$, on a $\displaystyle 0^{\underline{1-n}} = \frac{1}{1 \times 2 \times \cdots \times (n-1)} = \frac{1}{(n-1)!}$, et $\displaystyle (n+1)^{\underline{1-n}} = \frac{1}{(n+2) \times (n+3) \times \cdots \times (n+1+n-1)} = \frac{(n+1)!}{(2n)!}$, donc $\displaystyle S_n = \frac{1}{(n-1)(n-1)!} - \frac{(n+1)!}{(n-1)(2n)!}$. Lorsque n tend vers $+\infty$, tout tend assez trivialement vers 0, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = 0$.

(b) Constatons déjà que $\displaystyle\frac{1}{\binom{k}{p}} = \frac{p!(k-p)!}{k!} = \frac{p!}{(k-p+1)(k-p+2)\dots k} = p! \times (k-p)^{\underline{-p}}$.

Il suffit alors de faire un petit décalage d'indice : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{\binom{k}{p}} = p!\sum_{k=p}^{n}(k-p)^{\underline{p}} = p!\sum_{k=0}^{n-p} k^{\underline{p}}$.

En réutilisant la question précédente (c'est exactement la même somme avec un indice différent en haut de la somme), on a donc $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{\binom{k}{p}} = \frac{p!}{1-p}((n-p+1)^{\underline{1-p}} - 0^{\underline{1-p}})$. On en déduit de même qu'à la question précédente que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{\binom{k}{p}} = \frac{p!}{(p-1)(p-1)!} - \frac{p!(n-p+1)!}{(p-1)n!}$.

Comme tout à l'heure, le terme de droite tend vers 0 (les facteurs $p!$ et $p-1$ sont de simples constantes), donc la somme a une limite égale à $\displaystyle\frac{p!}{(p-1)(p-1)!} = \frac{p}{p-1}$. Je vous laisse interpréter ce magnifique résultat dans le triangle de Pascal (on fait en gros la somme de tous les inverses des coefficients dans une même colonne « jusqu'à l'infini »).

5. L'initialisation ne pose pas de problème : $(x+y)^{\underline{0}} = 1$, et la somme à droite ne comprned qu'un terme égal à 1 lorsque $n = 0$.
Pour l'hérédité, écrivons $(x+y)^{\underline{n+1}} = (x+y)^{\underline{n}} \times (x+y-n)$ d'après la question 1.e. On peut donc écrire, en exploitant l'hypothèse de récurrence, $(x+y)^{\underline{n+1}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x \times x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} \times (y-n) y^{\underline{n-k}}$. Or, $x \times x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}$ (celà découle immédiatement de la deuxième partie de la question 1.e), et $(y-n)y^{\underline{n-k}} = y^{\underline{n+1-k}} - ky^{\underline{n-k}}$ (d'après la même formule de la question 1.e).
Remplaçons : $(x+y)^{\underline{n+1}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k+1}} y^{\underline{n-k}} + \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n+1-k}} - \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n+1-k}}$. Les deux sommes intermédiaires s'annulent, il ne reste donc que les deux extrêmes. On effectue un petit décalage d'indices (comme dans le binôme classique) sur la première somme : $(x+y)^{\underline{n+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{\underline{k}} y^{\underline{n+1-k}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n+1-k}} = x^{\underline{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^{\underline{k}} y^{\underline{n+1-k}} + y^{\underline{n+1}} = x^{\underline{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n+1-k}} + y^{\underline{n+1}}$
$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n+1-k}} + y^{\underline{n+1}}$ (on termine comme pour la formule classique, en appliquant en cours de route la formule de Pascal).

6. (a) Commençons par calculer $\left(\frac{5}{2}\right)^{\underline{3}} = \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{8}$, en découle $\binom{\frac{5}{2}}{3} = \frac{\frac{15}{8}}{3!} = \frac{5}{16}$. De même, on calcule $\sqrt{2}^{\underline{3}} = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2) = \sqrt{2}(2-\sqrt{2}-2\sqrt{2}+2) = 4\sqrt{2}-6$, puis $\binom{\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}-6}{3!} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - 1$.

   (b) Puisque $x^{\underline{0}} = 1$ et $0! = 1$, on aura toujours $\binom{x}{0} = 1$. Par ailleurs, en utilisant le résultat de la question 1.d, on a immédiatement $\binom{-1}{k} = \frac{(-1)^k k!}{k!} = (-1)^k$.

   (c) La relation de Pascal devient désormais $\binom{x+1}{k} = \binom{x}{k} + \binom{x}{k-1}$ (pour un réel x quelconque, et k un entier naturel supérieur ou égal à 1). Or, $\binom{x}{k} + \binom{x}{k-1} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!} + \frac{x^{\underline{k-1}}}{(k-1)!}$. On a vu dans la question 1.f que $kx^{\underline{k-1}} = (x+1)^{\underline{k}} - x^{\underline{k}}$, donc $\frac{x^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} = \frac{(x+1)^{\underline{k}} - x^{\underline{k}}}{k!}$, et $\binom{x}{k} + \binom{x}{k-1} = \frac{(x+1)^{\underline{k}}}{k!} = \binom{x+1}{k}$, ce qu'on voulait prouver.

   (d) C'est en fait facile : $\binom{n}{x+y} = \frac{(x+y)^{\underline{n}}}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{\underline{k}}}{k!} \frac{y^{\underline{n-k}}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \binom{y}{n-k}$ (bizarrement, la version classique de l'égalité de Vandermonde, avec des coefficients binômiaux traditionnels, est plus compliquée à démontrer).

7. (a) Il faut arriver à appliquer la formule de Chu-Vandermonde, et pour cela transformer le $(-1)^k$ pour faire apparaitre un coefficient binômial ayant un indice $n-k$ en bas. Par exemple : $(-1)^k = (-1)^{2n-k} = (-1)^n \times (-1)^{n-k} = (-1)^n \times \begin{pmatrix} -1 \\ n-k \end{pmatrix}$ (on a simplement utilisé le fait que $(-1)^{2n}$ est toujours égal à 1), et le résultat de la question 6.*b*. On peut alors écrire que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{x}{k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{-1}{n-k} = (-1)^n \binom{x-1}{n}$ en appliquant directement la formule de Chu-Vandermonde.

(b) Commençons par calculer $\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-\frac{1}{2})_{\underline{k}}}{k!} = \frac{\frac{(-1)\times(-3)\times\cdots\times(-2k+1)}{2^k}}{k!}$ $= (-1)^k \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{2^k k!} = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^k k! \times 2 \times 4 \times \cdots \times (2k)} = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^k k! \times 2^k k!}$ (on factorise simplement tous les entiers pairs qu'on a fait apparaitre au dénominateur par 2), donc $(-1)^k 4^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \binom{2k}{k}$.

(c) On se contente d'appliquer à chacun des deux coefficients binômiaux de la somme la formule de la question précédente, puis on conclut grâce à la formule de Chu-Vandermonde : $\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 4^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \times (-1)^{n-k} 4^{n-k} \binom{-\frac{1}{2}}{n-k}$ $= (-1)^n 4^n \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k}\binom{-\frac{1}{2}}{n-k} = (-1)^n 4^n \binom{-1}{n} = 4^n$, puisqu'on a calculé plus haut $\binom{-1}{n} = (-1)^n$.