Devoir Maison numéro 5

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le jeudi 8 février

Problème

Pour tout réel x et tout entier naturel n, on note $x^{\underline{n}} = \prod_{i=0}^{n-1}(x-i)$. Par convention, $x^{\underline{0}} = 1$ quel que soit le réel x. Ainsi, on aura par exemple $x^{\underline{3}} = x(x-1)(x-2)$.

1. Questions préliminaires.
   (a) Calculer les valeurs de $\left(\frac{3}{2}\right)^{\underline{n}}$, pour tous les entiers n inférieurs ou égaux à 5.
   (b) Si n et k sont deux entiers naturels tels que $k < n$, prouver que $k^{\underline{n}} = 0$.
   (c) Dans le cas contraire, montrer que $\binom{n}{k} = \frac{k^{\underline{n}}}{n!}$.
   (d) Exprimer $(-1)^{\underline{n}}$ en fonction de $n!$.
   (e) Montrer que $x^{\underline{n+1}} = x \times (x-1)^{\underline{n}} = x^{\underline{n}} \times (x-n)$.
   (f) En déduire la relation $(n+1)x^{\underline{n}} = (x+1)^{\underline{n+1}} - x^{\underline{n+1}}$.
   (g) Simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n} k^{\underline{p}}$, où n et p sont deux entiers naturels fixés.
2. Applications.
   (a) En utilisant la question 1.g, retrouver les valeurs de $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2$.
   (b) Soit $p \leq n$ deux entiers naturels, simplifier la somme $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$ (le résultat sera donné sous forme d'un coefficient binomial, et on utilisera à nouveau la question 1.g).
3. On définit désormais, pour un entier $n \in \mathbb{N}$, $x^{\underline{-n}} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(x+i)}$. Par exemple, $x^{\underline{-3}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.
   (a) Pour quelles valeurs de x cette « puissance » est-elle définie ?
   (b) Démontrer que, lorsqu'elle a un sens, la relation de la question 1.f reste valable lorsque $n < 0$.
4. Applications.
   (a) Simplifier $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+n)}$, et déterminer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.
   (b) Montrer que $\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{\binom{k}{p}} = p! \sum_{k=0}^{n-p} k^{\underline{-p}}$, en déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{\binom{k}{p}}$.

5. Démontrer par récurrence cet ersatz de la formule du binôme :

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}$$

6. On définit, pour tout réel x et tout entier k, le coefficient binômial généralisé $\displaystyle\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!}$.

   (a) Calculer les valeurs de $\displaystyle\binom{\frac{5}{2}}{3}$ et de $\displaystyle\binom{\sqrt{2}}{3}$.

   (b) Calculer la valeur de $\displaystyle\binom{x}{0}$ pour un réel quelconque, ainsi que celle de $\displaystyle\binom{-1}{k}$.

   (c) Montrer que la relation de Pascal reste vraie pour les coefficients binômiaux généralisés.

   (d) À l'aide de la généralisation du binôme de Newton vue dans la question 6, démontrer la formule de Chu-Vandermonde : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n}$.

7. Applications.

   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{x}{k} = (-1)^n \binom{x-1}{n}$.

   (b) Montrer que, si k est un entier naturel, $\displaystyle\binom{2k}{k} = (-1)^k 4^k \binom{-\frac{1}{2}}{k}$.

   (c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$.