Devoir Maison numéro 4

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard en 2018

Exercice 1 : calcul matriciel

On souhaite calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ par plusieurs méthodes différentes. On posera également dans cet exercice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Les différentes parties de cet exercice sont complètement indépendantes.

1. Première méthode : via une relation de récurrence.
   (a) Montrer que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.
   (b) Calculer A^2 et A^3, et déterminer des constantes réelles a, b, c et d telles que $A^2 = aA + bI$ et $A^3 = cA + dI$.
   (c) Prouver, pour tout entier naturel n, l'existence de deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_nI$. On donnera des relations permettant d'exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   (d) Vérifier que la suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. Calculer a_n et b_n, puis A^n.
2. Deuxième méthode : via une décomposition astucieuse.
   (a) On pose $B = A + I$ et $C = A - 2I$. Calculer BC et en déduire que A est inversible, ainsi que l'expression de A^{-1}.
   (b) Déterminer les puissances des matrices B et C.
   (c) Exprimer A sous la forme $xB + yC$ (où x et y sont deux constantes réelles) puis, à l'aide des questions précédentes et de la formule du binôme de Newton, calculer A^n.
3. Troisième méthode : à l'aide de polynômes.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on note R_n le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par $(X+1)(X-2)$. Calculer R_3 et R_4 (on écrira les divisions euclidiennes explicitement sur la copie).
   (b) Que peut-on généralement dire du degré de R_n ? Calculer $R_n(-1)$ et $R_n(2)$, et en déduire la valeur de R_n (on rappelle que la division euclidienne permet d'affirmer que $X^n = Q(X+1)(X-2) + R_n$).
   (c) En déduire l'expression de A^n.
4. Quatrième méthode : diagonalisation.
   (a) Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.
   (b) Calculer $D = P^{-1}AP$.
   (c) Montrer rigoureusement que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$, et en déduire la valeur de A^n.
   (d) Les formules obtenues pour A^n restent-elles valables pour des valeurs négatives de n (on justifiera bien entendu la réponse donnée) ?

Exercice 2 : suites

On cherche dans cet exercice à préciser les résultats obtenus quand on effectue un calcul de moyenne arithmético-géométrique. On fixe pour tout l'exercice un réel $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. On définit une suite (u_n) par $u_0 = \cos(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$.
   (a) Montrer que la suite définie par $v_n = u_n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est une suite géométrique.
   (b) En déduire une expression de u_n en fonction de n.
   (c) Prouver que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. On pose maintenant $a_0 = 1$, $b_0 = \frac{1}{\cos(x)}$ et pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.
   (a) Exprimer b_1 comme quotient de deux cosinus.
   (b) Montrer que les deux suites ont des termes toujours strictement positifs.
   (c) Montrer que $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})}(b_n - a_n)$.
   (d) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$.
   (e) En déduire la monotonie des suites (a_n) et (b_n).
   (f) Montrer que $0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{\cos(x)} - 1\right)$.
   (g) En déduire que les deux suites convergent vers une même limite L.
   (h) Vérifier qu'on peut exprimer les deux suites par $a_n = \frac{u_n \cos(\frac{x}{2^n})}{\cos^2(x)}$ et $b_n = \frac{u_n}{\cos^2(x)}$.
   (i) En déduire la valeur de L.
3. On considère dans cette question le cas particulier $x = \frac{\pi}{4}$.
   (a) Déterminer la valeur de L dans ce cas.
   (b) En déduire un encadrement de π faisant intervenir a_n et b_n.
   (c) Montrer que $0 < b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{4}(b_n - a_n)$.
   (d) Déterminer une valeur de n pour laquelle on est certain d'obtenir un encadrement de π à 10^{-9} près.