Devoir Maison numéro 3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

30 novembre 2017

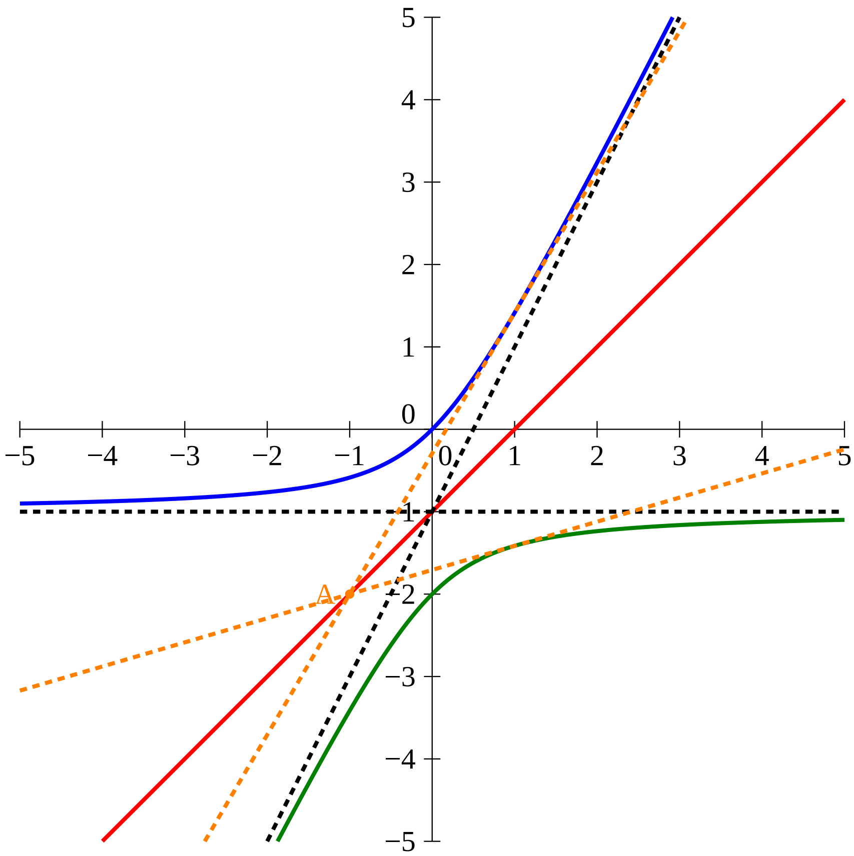
Exercice 1

1. On peut normaliser l'équation et continuer à résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' - \dfrac{x}{x^2+1}y = \dfrac{1+x}{x^2+1}$. L'équation homogène associée $y' - \dfrac{x}{x^2+1}y = 0$ admet comme solutions les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)} = K\sqrt{x^2+1}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
2. On peut bien entendu constater que la fonction y_p définie par $y_p(x) = x - 1$ est solution évidente de l'équation : sa dérivée vaut 1, et $(x^2+1) - x(x-1) = x + 1$. Sinon, on est bien obligés de recourir à la variation de la constante, en recherchant une solution particulière sous la forme $y_p(x) = K(x)\sqrt{x^2+1}$, ce qui donne $y_p'(x) = K'(x)\sqrt{x^2+1} + \dfrac{xK(x)}{\sqrt{x^2+1}}$. La fonction y_p est donc solution de l'équation (E) si $K'(x)\sqrt{x^2+1} + \dfrac{xK(x)}{\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{xK(x)\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} = \dfrac{1+x}{x^2+1}$, soit $K'(x) = \dfrac{1+x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$. Il faut alors être particulièrement inspiré pour trouver une primitive : $\displaystyle\int \frac{1+x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{1+x^2+x-x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x-x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$. Effectuons une IPP sur la première moitié de cette intégrale (on ne touche pas à la deuxième moitié) en posant $u'(x) = 1$, soit $u(x) = x$, et $v(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, donc $v'(x) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. On en déduit qu'on peut prendre $K(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx + \int \frac{x-x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ d'après le calcul de v' effectué lors de l'IPP. On retrouve bien $y_p(x) = x - 1$.
   Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y_k : x \mapsto x - 1 + k\sqrt{x^2+1}$.
3. On calcule aisément $y_k(1) = k\sqrt{2}$, et comme $y_k'(x) = 1 + \dfrac{kx}{\sqrt{x^2+1}}$, on aura $y_k'(1) = 1 + \dfrac{k}{\sqrt{2}}$, donc la tangente à la courbe en son point d'abscisse 1 a pour équation $y = \left(1 + \dfrac{k}{\sqrt{2}}\right)(x - 1) + k\sqrt{2} = \left(1 + \dfrac{k}{\sqrt{2}}\right)x - 1 + \dfrac{k}{\sqrt{2}}$. Ces droites se coupent en un même point s'il existe une valeur de x pour laquelle y est indépendant de k, ce qui se produira lorsque $x = -1$, on a alors toujours $y = -1 - 1 = -2$, donc toutes les tangentes se coupent au point $A(-1, -2)$.
4. Commençons par regarder ce qui se passe en $+\infty$; si $x > 0$, on peut écrire $\dfrac{y_k(x)}{x} = 1 - \dfrac{1}{x} + k\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$, qui a pour limite $1+k$ lorsque x tend vers $+\infty$. Calculons alors $y_k(x) - (1+k)x = x - 1 + k\sqrt{x^2+1} - x - kx = k(\sqrt{x^2+1} - x) - 1$. Or, en multipliant par la quantité conjuguée, $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$, donc $y_k(x) - (1+k)x = \dfrac{k}{\sqrt{x^2+1}+x} - 1$,

qui a manifestement pour limite -1 en $+\infty$. On a donc une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = (1+k)x - 1$. Notons en passant le cas particulier obtenu lorsque $k = -1$, où la fonction y_k n'a pas de limite infinie en $+\infty$ (et donc pas d'asymptote oblique). En effet, $y_{-1}(x) = x - 1 - \sqrt{x^2+1} = \dfrac{x^2 - (x^2+1)}{x + \sqrt{x^2+1}} - 1 = -\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} - 1$, qui tend cette fois vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$. La courbe $\mathcal{C}_{-1}$ a donc une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ (équation qui reste d'ailleurs cohérente avec celles des asymptotes obliques).

En $-\infty$, même principe, mais cette fois-ci, comme $x < 0$, on aura $y_k(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - k\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$, qui a pour limite $1-k$. Comme ci-dessus, on aura un cas particulier pour $k = 1$, où l'asymptote sera horizontale d'équation $y = -1$, et le reste du temps, on obtiendra une asymptote oblique d'équation $y = (1-k)x - 1$ (c'est le même calcul via multiplication par la quantité conjuguée).

5. La fonction $y_0 : x \mapsto x - 1$ ne mérite pas d'être étudiée, c'est une fonction affine. Pour la fonction $y_1 : x \mapsto x - 1 + \sqrt{x^2-1}$, on calcule $y_1'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$. Cette dérivée est positive si $\sqrt{x^2+1} > -x$, ce qui évidemment toujours le cas lorsque $x \geq 0$, mais en fait aussi quand $x < 0$ car dans ce cas l'inégalité est équivalente à celle obtenue en élevant tout au carré : $x^1 + > x^2$, ce qui est bien sûr toujours vrai. La fonction y_1 est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Pour la fonction $y_{-1} : x \mapsto x - 1 - \sqrt{x^2+1}$, on a $y_1'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1}}$, qui est également toujours positif (calculs symétriques de ce qu'on a fait pour y_1), cette fonction est elle aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Voici les courbes demandées (en rouges pour $k = 0$, en bleu pour $k = 1$ et en vert pour $k = -1$) :



Exercice 2

I. Expression explicite de f_k.

1. Comme la fonction ch est définie, continue et minorée par 1 sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^k(t)}$ est également définie et continue sur $\mathbb{R}$ quel que soit l'entier naturel k. La fonction f_k étant la primitive de cette dernière fonction s'annulant en 0, elle est donc bien définie continue et dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$.

2. En remplaçant le ch par son expression explicite, $f_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2}{e^t + e^{-t}}\, dt$. Puisqu'on nous le propose si gentiment, posons donc $u = e^t$ (on peut le faire sans problème puisque la fonction exponentielle est bijective sur $[0, x]$), les bornes de l'intégrale deviennent $e^0 = 1$ et e^x, et l'élément différentiel donne $dt = \dfrac{1}{u}\, du$ puisque $t = \ln(u)$. On obtient alors $f_1(x) = \displaystyle\int_1^{e^x} \frac{2}{u + \frac{1}{u}} \times \frac{1}{u}\, du = \int_1^{e^x} \frac{2}{u^2+1}\, du = [2\arctan(u)]_1^{e^x} = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$.

3. C'est immédiat quand on sait que cette fameuse fonction th a pour dérivée $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$: on a simplement $f_2(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)}\, dt = [\operatorname{th}(t)]_0^x = \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$.

4. On peut donc écrire $f_k(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{ch}^{k+1}(t)}\, dt$, et effectuer une IPP en posant $u'(t) = \operatorname{ch}(t)$, donc par exemple $u(t) = \operatorname{sh}(t)$, et $v(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^{k+1}(t)}$, ce qui donne $v'(t) = -\dfrac{(k+1)\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^{k+2}(t)}$. On obtient alors $f_k(x) = \left[\dfrac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^{k+1}(t)}\right]_0^x + (k+1)\displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sh}^2(t)}{\operatorname{ch}^{k+2}(t)}\, dt$. Or, on sait bien que $\operatorname{sh}^2(t) = \operatorname{ch}^2(t) - 1$ (seule formule de trigonométrie hyperbolique au programme), donc $\dfrac{\operatorname{sh}^2(t)}{\operatorname{ch}^{k+2}(t)} = \dfrac{\operatorname{ch}^2(t) - 1}{\operatorname{ch}^{k+2}(t)} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^k(t)} - \dfrac{1}{\operatorname{ch}^{k+2}(t)}$, ce qui permet d'obtenir la relation $f_k(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^{k+1}(x)} + (k+1)(f_k(x) - f_{k+2}(x))$, ou encore $(k+1)f_{k+2}(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^{k+1}(x)} + kf_k(x)$. Il ne reste plus qu'à tout diviser par $k+1$ pour retrouver la formule de l'énoncé.

5. On applique bêtement la formule précédente : $f_3(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}^2(x)} + \dfrac{1}{2}f_1(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}^2(x)} + \arctan(e^x) - \dfrac{\pi}{4}$ (expression qu'on ne perdra pas de temps à essayer de simplifier). De même, $f_4(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{3\operatorname{ch}^3(x)} + \dfrac{2}{3}f_2(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{3\operatorname{ch}^3(x)} + \dfrac{2\operatorname{sh}(x)}{3\operatorname{ch}(x)}$ (qu'on peut assez facilement exprimer uniquement à partir de la fonction th si on ne souhaite en exploitant l'égalité $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$: $f_4(x) = \operatorname{th}(x)\left(\dfrac{1}{3\operatorname{ch}^2(x)} + \dfrac{2}{3}\right) = \operatorname{th}(x)(1 - \dfrac{1}{3}\operatorname{th}^2(x)) = \operatorname{th}(x) - \dfrac{1}{3}\operatorname{th}^3(x))$.

II. Étude de la fonction f_k.

1. Pour être tout à fait rigoureux, le mieux est de faire le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant f_k : les bornes deviennent 0 et $-x$, on aura $du = -dt$, et l'expression à l'intérieur de l'intégrale ne change pas puisque, la fonction ch étant paire, $\operatorname{ch}^k(-t) = \operatorname{ch}^k(t)$. On peut alors écrire $f_k(x) = \displaystyle\int_0^{-x} -\frac{1}{\operatorname{ch}^k(u)}\, du = -f(-x)$, ce qui prouve l'imparité de la fonction f_k.

2. La fonction f_k a pour dérivée $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^k}$, qui est toujours positive, donc f_k est croissante sur $\mathbb{R}$.

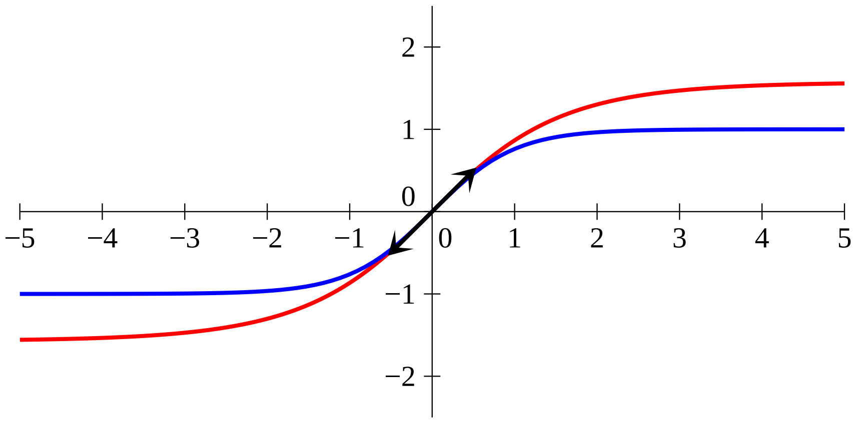
3. Une majoration particulièrement peu subtile suffit : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t) \geq 1$, donc $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^k(t)} \leq 1$. On intègre en utilisant la propriété donnée dans l'énoncé : $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^k(t)}\,dt \leq \int_0^x 1\,dt$, soit $f_k(x) \leq x$.

4. Si $t \geq 0$, on peut écrire que $0 \leq e^{-t} \leq e^t$ (puisque $-t \leq t$), donc $e^t \leq e^t + e^{-t} \leq 2e^t$, dont on déduit en passant à l'inverse (tout est positif) que $e^{-t} \geq \dfrac{1}{e^t + e^{-t}} \geq \dfrac{e^{-t}}{2}$. Il ne reste plus qu'à tout multiplier par 2 pour retrouver l'encadrement de l'énoncé.

5. À l'aide de la majoration de la question précédente, on trouve $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^k(t)} \leq 2^k e^{-kt}$ (toujours lorsque $t \geq 0$, et on peut intégrer cette inégalité : $f_k(x) \leq \displaystyle\int_0^x 2^k e^{-kt}\,dt = 2^k \left[-\frac{e^{-kt}}{k}\right]_0^x = -\frac{2^k e^{-kx}}{k} + \frac{2^k}{k} \leq \frac{2^k}{k}$ (puisqu'on soustrait une constante positive).

6. On sait que $f_k(0) = 0$ (la fonction étant de toute façon impaire), et $f_k'(0) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^k(0)} = 1$, donc la tangente à chacune des courbes sera la même droite d'équation $y = x$.

7. Voici une allure exacte (à l'aide des formules et de l'ordi) pour les fonctions f_1 (courbe en rouge) et f_2 (courbe en bleu), qui n'est guère spectaculaire puisqu'on a simplement les fonctions impaires strictement croissantes avec des asymptotes horizontales en $\pm\infty$:



III. Des précisions sur la valeur de l_k.

1. Par composition de limites classiques, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \arctan(e^x) = \frac{\pi}{2}$, donc $l_1 = 2 \times \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$. Les limites de la fonction th avaient été déterminées en exercice, et peuvent se retrouver rapidement à partir de la forme exponentielle des fonctions ch et sh (on factorise tout par e^x et c'est trivial) : $l_2 = 1$.

2. Il suffit de reprendre la relation de récurrence de la question $I.4$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{sh}(x)}{(k+1)\,\mathrm{ch}^{k+1}(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{th}(x)}{k+1} \times \frac{1}{\mathrm{ch}^k(x)} = 0$ (puisque $k \geq 1$), il reste donc $l_{k+2} = \dfrac{k}{k+1} l_k$ quand on passe à la limite.

3. Puisque la formule est donnée (ce qui est très gentil, car on aurait très bien pu vous demander de la démontrer sans vous la donner, un bon exercice de manipulation de produits), on

peut la prouver bêtement par récurrence. Pour $k = 1$, $\dfrac{4^1 \times 1!^2}{2 \times 2!} = \dfrac{4}{4} = 1 = l_2$, ça marche. Supposons donc la formule vérifiée au rang k, alors $l_{2(k+1)} = l_{2k+2} = \dfrac{2k}{2k+1} l_{2k} = \dfrac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!} = \dfrac{4^k (k+1)!^2}{(k+1)^2 (2k+1)!} = \dfrac{4 \times 4^k (k+1)!^2}{(2k+2)^2 (2k+1)!} = \dfrac{4^{k+1} (k+1)!^2}{(2k+2) \times (2k+2)!}$, ce qui est exactement la formule souhaitée au rang $k+1$. Le principe de récurrence assure alors que la formule est valable pour tout entier $k \geq 1$.

4. Il suffit de constater que $(k+1) l_{k+1} l_{k+2} = (k+1) l_{k+1} \times \dfrac{k}{k+1} l_k = k l_k l_{k+1}$. La valeur de la constante est celle de $l_1 l_2 = \dfrac{\pi}{2}$. On en déduit directement que $l_{2k+1} = \dfrac{\pi}{4k l_{2k}} = \dfrac{(2k)!\pi}{2^{2k+1} (k!)^2}$.