Devoir Maison numéro 3

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 30 novembre 2017

Exercice 1

On considère l'équation différentielle (E) : $(x^2+1)y' - xy = 1 + x$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. En déduire les solutions de l'équation (E). On notera y_k les solutions (paramétrées par un réel k) et $\mathcal{C}_k$ les courbes intégrales correspondantes.
3. Déterminer la tangente en son point d'abscisse 1 à la courbe $\mathcal{C}_k$, et prouver que toutes ces tangentes se coupent en un même point.
4. Étudier la présence d'asymptotes obliques aux courbes $\mathcal{C}_k$. On utilisera pour cela la méthode suivante : si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y_k(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$, et si $\lim\limits_{x \to +\infty} y_k(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ sera asymptote à $\mathcal{C}_k$ en $+\infty$ (méthode similaire en $-\infty$ si besoin).
5. Étudier complètement les fonctions y_{-1}, y_0 et y_1 et tracer des allures soignées des courbes correspondantes dans un même repère (en indiquant les tangentes en 1 et les éventuelles asymptotes).

Exercice 2

On définit, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, une fonction f_k par $f_k(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^k(t)}\, dt$.

I. Expression explicite de f_k.

1. Justifier rigoureusement que la fonction f_k est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f_1(x)$ en effectuant le changement de variable $u = e^t$.
3. Calculer $f_2(x)$ en exploitant les propriétés de la fonction th vues en exercice il y a quelques mois.
4. En écrivant $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^k(x)} = \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)}$, effectuer une IPP et prouver la relation de récurrence : $f_{k+2}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{(k+1)\,\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + \dfrac{k}{k+1} f_k(x)$.
5. En déduire une expression explicite de $f_3(x)$ et de $f_4(x)$.

II. Étude de la fonction f_k.

Dans toute cette partie (et la suivante), on pourra utiliser la propriété suivante : si g et h sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$, et telles que $\forall x \in [a,b]$, $g(x) \leq h(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt \leq \int_a^b h(t)\ dt$.

1. Montrer que la fonction f_k est impaire.
2. Préciser les variations de la fonction f_k.
3. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_k(x) \leq x$.
4. Montrer que, si $t \geq 0$, alors $e^{-t} \leq \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)} \leq 2e^{-t}$.
5. En déduire que f_k est majorée par la constante $\dfrac{2^k}{k}$ sur $[0, +\infty[$, ce qui suffit à assurer la présence d'une limite finie l_k (qu'on ne cherche pas à calculer pour l'instant) à la fonction f_k en $+\infty$.
6. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f_k en son point d'abscisse 0.
7. Tracer une allure possible de la courbe de la fonction f_k.

III. Des précisions sur la valeur de l_k.

1. Calculer les limites l_1 et l_2 (à l'aide des expressions explicites de la première partie).
2. Toujours en exploitant les résultats de la première partie, prouver que $l_{k+2} = \dfrac{k}{k+1} l_k$.
3. Déduire des deux questions précédentes que $l_{2k} = \dfrac{4^k (k!)^2}{(2k) \times (2k)!}$.
4. Montrer que la suite $(k l_k l_{k+1})$ est constante (préciser la valeur), et en déduire une expression possible de l_{2k+1}.