Devoir Maison numéro 2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

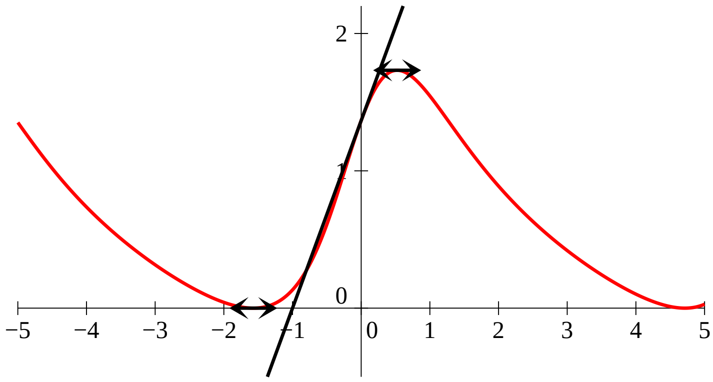
17 octobre 2017

Exercice 1

1. On peut utiliser la méthode astucieuse suivante : $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}$ (on reconnait en effet dans le membre de gauche une formule d'addition de cosinus). Avec les notations abusives du cours, on en déduit que $x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] [2\pi]$, soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right] [2\pi]$. Si on veut le noter plus correctement, $\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{6}\right]$.
2. Le dénominateur ne pouvant jamais s'annuler ($\sqrt{3} > 1$), la fonction est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. La fonction f n'est ni paire ni impaire, mais elle est clairement 2π-périodique, on peut l'étudier par exemple sur $[-\pi, \pi]$.
4. On calcule donc $f'(x) = \frac{\sqrt{3}\cos(x) - \cos^2(x) - \sin(x) - \sin^2(x)}{(\sqrt{3} - \cos(x))^2} = \frac{\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) - 1}{(\sqrt{3} - \cos(x))^2}$ (il n'y a pas l'ombre d'une factorisation possible, le concepteur de l'énoncé a manifestement craqué).
5. Sur notre intervalle, la dérivée est positive entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{6}$. On calcule donc $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, et $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \simeq 1.7$. On peut aussi calculer en passant $f(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \simeq 1.4$ ou $f(\pi) = f(-\pi) = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \simeq 0.4$. Puisqu'on nous le demande, dressons donc un tableau de variations :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{6}$		π
f	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	↘	0	↗	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	↗	$\sqrt{3}$	↘	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

6. On a déjà donné $f(0) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, et $f'(0) = \frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}-1)^2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, donc la tangente a pour équation $y = \frac{\sqrt{3}+1}{2}(x+1)$ (elle coupera donc l'axe des abscisses pour $x = -1$).
7. Voici une allure sur un peu plus d'une période :



Exercice 2

1. (a) La fonction h est définie si $x \neq -1$ et $\dfrac{1}{x} > -1$, donc $\mathcal{D}_h =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

   (b) Il n'y a pas de raison de faire autre chose que dériver la fonction : $h'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{(1+x)^2} = -\dfrac{1}{x(1+x)} + \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{x-(1=x)}{x(1+x)^2} = -\dfrac{1}{x(1+x)^2}$, qui est du signe opposé à celui de x. La fonction h est donc strictement croissante sur $]-\infty, -1[$ et décroissante sur $]0, +\infty[$. Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1$, on a facilement $\lim\limits_{x \to \pm\infty} h(x) = 0$. Pas de diffciculté non plus en 0, où $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 + \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$. C'est plus compliqué pour la dernière limite, où on posera en cours de calcule $X = -x - 1$ (qui tendra donc vers 0 par valeurs supérieures quand x tend vers -1^-) : $h(x) = \ln\left(\dfrac{X}{X+1} + \dfrac{1}{X}\right) = \dfrac{X\ln(X) - X\ln(X+1) + 1}{X}$. Par croissance comparée, on sait que $\lim\limits_{X \to 0} X\ln(X) = 0$, donc notre numérateur a pour limite 1, et on en déduit que $\lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = +\infty$. Voici le tableau de variations demandé, dont on déduit sans difficulté que h est toujours positive :

x	$-\infty$		-1	0		$+\infty$
h	0	$\nearrow$	$+\infty$ ||	|| $+\infty$	$\searrow$	0

2. (a) La fonction g a le même domaine de définition que h. et $g'(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) + x \times \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1+x} = h(x)$ (quelle surprise !). La fonction g est donc strictement croissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]0, +\infty[$.

   (b) Il n'y pas de problème en -1 : le ln tend vers $-\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = +\infty$. En 0, il suffit d'écrire que $g(x) = x\ln(x+1) - x\ln(x)$ et d'appliquer la croissance comparée pour obtenir $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

   (c) Avec le changement de variable recommandé, on obtient simplement $g(x) = \dfrac{\ln(1+X)}{X}$, et le cours nous assure que $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 1$.

3. Personne ne m'a fait remarquer que cette dernière question était étrange puisque l'étude ne faisait pas intervenir les fonctions précédentes et que la question d n'avait aucun sens, il fallait corriger l'erreur d'énoncé : $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

   (a) En écrivant f sous forme exponentielle, $f(x) = e^{g(x)}$, donc $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

   (b) La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, f a les mêmes variations que g, elle est croissante sur chacun de ses deux intervalles de définition.

   (c) Il suffit de rajouter une exponentielle autour des limites de g, ce qui donne $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = e$; $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1	0		$+\infty$
f	e	$\nearrow$	$+\infty$ ||	|| 1	$\nearrow$	e

   (d) On peut écrire $\dfrac{f(x) - 1}{x} = \dfrac{e^{g(x)} - 1}{g(x)} \times \dfrac{g(x)}{x}$. On sait (c'est du cours) que $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{g(x)} - 1}{g(x)} = 1$ (puisque g tend vers 0 en 0). De plus, $\dfrac{g(x)}{x} = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ a une limite infinie en 0, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Cette limite étant celle du taux d'accroissement de la fonction f en 0 (ou plutôt de la fonction obtenue en prolongeant f par continuité en posant $f(0) = 0$), on en déduit que f n'est pas dérivable en 0 et qu'il y aura une tangente verticale à la courbe à cet endroit.

   (e) Voici la courbe de la fonction f :