Devoir Maison numéro 1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

19 septembre 2017

Exercice 1

1. Il n'y a pas de forme indéterminée en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} - 2 = 1 - 2 = -1$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. De la même façon, on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Pas de problème non plus à gauche de 0 : $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} - 2 = -2$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$. La seule limite posant problème est donc celle à droite de 0 où on a pour le coup $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} - 2 = +\infty$. On peut poser $X = \dfrac{1}{x}$ (qui aura donc pour limite $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures) et écrire $f(x) = \dfrac{e^X - 2}{X}$. Il faut alors savoir que $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ (résultat classique de croissance comparée) pour en déduire que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

2. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} - \dfrac{1}{x^2}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$.

3. La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty, 0[$ et croissante sur $]0, +\infty[$. Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$, on a sans problème $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 1 - 2 = -1$. La limite à droite de 0 ne pose cette fois-ci pas de problème : $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 - \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$. La dernière limite (à gauche en 0) est plus problématique : $g(x) = e^{\frac{1}{x}} - \dfrac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} - 2$. Seul le terme du milieu est une forme indéterminée, et en posant $X = \dfrac{1}{x}$ qui tend vers $-\infty$, on se ramène à Xe^X, qui par croissance comparée va tendre vers 0. On en déduit finalement que $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -2$. D'où le tableau de variations complet suivant :

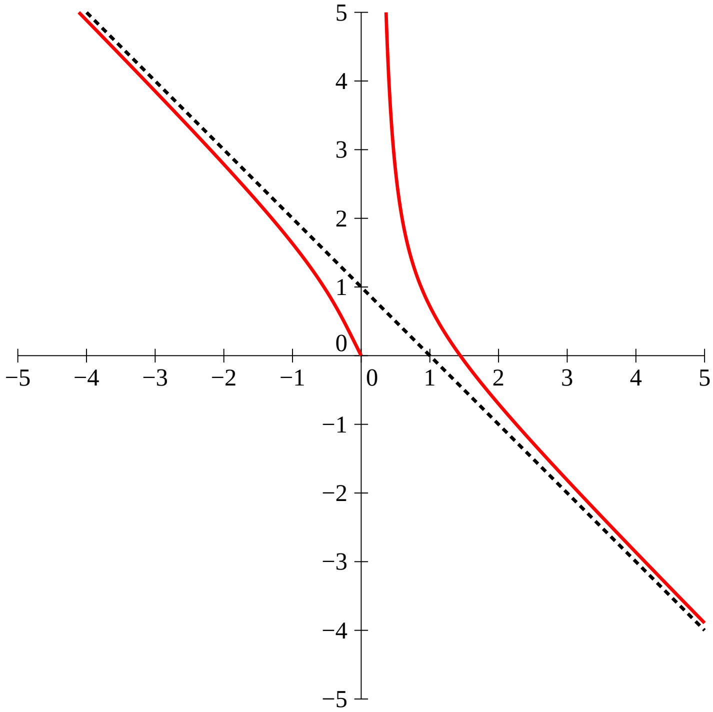
x	$-\infty$		0		$+\infty$
g	-1	$\searrow$	-2 ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1

   La fonction g est manifestement toujours strictement négative.

4. Dérivons donc : $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - 2 + x \times \left(-\dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\right) = g(x)$. Ça alors, quelle surprise ! La question précédente permet donc d'affirmer que f est strictement décroissante sur chacun de ses intervalles de définition, et de tracer le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	$0 \parallel +\infty$	$\searrow$	$-\infty$

5. On a $f(x)+x = x(e^{\frac{1}{x}}-1)$, et on va calculer la limite en utilisant à nouveau le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$, pour écrire $f(x)+x = \dfrac{e^X - 1}{X}$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} X = 0$, le résultat donné dans l'énoncé assure que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)+x = 1$. Autrement dit, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-(1-x) = 0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = 1-x$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
6. Pas grand chose à ajouter à ce qui a été calculé :



Exercice 2

1. Il faut simplement que l'expression sous la racine carrée soit positive. Elle a pour discriminant $\Delta = 4+12 = 16$ et admet pour racines $x_1 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$. L'équation a donc un sens si $x \in]-\infty, -3]$ et si $x \in [1, +\infty[$.
2. Lorsque $m = 1$ l'équation $\sqrt{x^2+2x-3} = x+1$ implique (en élevant au carré) $x^2+2x-3 = x^2+2x+1$, équation manifestement impossible. On en déduit que $\mathcal{S}_1 = \emptyset$ (on notera de façon générale S_m les solutions de l'équation pour laquelle le paramètre prend la valeur m). Lorsque $m = 0$, l'équation $\sqrt{x^2+2x-3} = 1$ est équivalente (tout est positif) à $x^2+2x-4 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4+16 = 20$ et admet deux racines $x_3 = \dfrac{-2-2\sqrt{5}}{2} = -1-\sqrt{5}$ et $x_4 = -1+\sqrt{5}$. On a donc $\mathcal{S}_0 = \{-1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}\}$.
3. Lorsque $m = 0$, l'inéquation est évidemment toujours vérifiée. Si $m > 0$, on peut diviser par m sans changer le sens de l'inégalité pour obtenir $x \geq -\dfrac{1}{m}$, et l'inéquation est donc vérifiée

sur $\left[-\frac{1}{m}, +\infty\right[$. Au contraire, si $m < 0$, on doit changer le sens et l'inéquation est vérifiée sur $\left]-\infty, -\frac{1}{m}\right]$.

4. Il faut isoler les valeurs $m = 1$ et $m = -1$ pour lesquelles l'équation n'est pas une équation du second degré. Lorsque $m = 1$ l'équation se résume à $4 = 0$ et ne peut donc pas avoir de solution. Lorsque $m = -1$, l'équation devient $-4x + 4 = 0$, qui admet pour unique solution $x = 1$. Dans le cas général, on calcule le discriminant $\Delta = 4(m-1)^2 - 16(m^2-1) = -12m^2 - 8m+20 = 4(-3m^2-2m+5) = 4(1-m)(3m+5)$ (factorisation qu'on peut obtenir sans calculer le moindre discriminant en factorisant simplement par $m-1$ à l'étape précédente). L'équation n'admet donc de solutions réelles (on peut bien sûr donner les solutions complexes quand $\Delta < 0$, mais vu ce qui est demandé dans la suite de l'exercice, ça n'a vraiment pas un grand intérêt, l'équation initiale supposant clairement que $x \in \mathbb{R}$) que si $m \in \left[-\frac{5}{3}, 1\right[\backslash\{-1\}$ (on élimine les valeurs $m = 1$ et $m = -1$ qui ont déjà été traitées auparavant). Lorsque $m = -\frac{5}{3}$, il y a une racine double à l'équation égale à $\frac{1-m}{m^2-1} = -\frac{1}{m+1} = \frac{3}{2}$. Si $-\frac{5}{3} < m < 1$, il y a deux solutions réelles distinctes qui sont égales à $x_1 = \frac{-2(m-1) + 2\sqrt{(1-m)(3m+5)}}{2(m-1)(m+1)} = -\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+1}\sqrt{\frac{3m+5}{1-m}}$. Incroyable mais vrai, il s'agit exactement de la valeur nommée x_1 dans l'énoncé de la question suivante. Bien entendu, l'autre solution est banalement égale à l'autre valeur x_2 introduite dans cette même question.

5. (a) On a simplement $x_2 - x_1 = \frac{2}{m+1}\sqrt{\frac{3m+5}{1-m}}$, qui est du signe de $m+1$. On aura donc $x_2 \geq x_1$ si $m \geq -1$, et $x_1 \geq x_2$ sinon.

   (b) Avec l'hypothèse effectuée sur m, les réels m, $m+1$ et $1-m$ sont tous les deux positifs, on peut donc écrire $x_1 \geq -\frac{1}{m} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{3m+5}{1-m}} \geq 1 - \frac{m+1}{m} = -\frac{1}{m} \Leftrightarrow \frac{3m+5}{1-m} \leq \frac{1}{m^2} \Leftrightarrow m^2(3m+5) - (1-m) \leq 0$, ce qui est bien l'inéquation demandée par l'énoncé. Le polynôme $3m^3+5m^2+m-1$ admet pour racine évidente $m = -1$, on peut donc écrire $3m^3+5m^2+m-1 = (m+1)(am^2+bm+c) = am^3+(a+b)m^2+(b+c)m+c$. Par identification des coefficients, on doit avoir $a = 3$, puis $a+b = 5$ donc $b = 2$ et $b+c = 1$, donc $c = -1$, ce qui vérifie bien la dernière condition. On a donc $3m^3+5m^2+m-1 = (m+1)(3m^2+2m-1)$, et le deuxième facteur du membre de droite a pour discriminant $\Delta = 4+12 = 16$ et admet pour racines $m_1 = \frac{-2-4}{6} = -1$ et $m_2 = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}$. Finalement $3m^3+5m^2+m-1 = (m+1)^2(3m-1)$ est du signe de $3m-1$, donc notre inéquation est vérifiée si $m \leq \frac{1}{3}$, donc ici si $m \in \left]0, \frac{1}{3}\right]$.

   (c) On a toujours $m+1 > 0$, le même début de calcul qu'à la question précédente mène à l'inéquation équivalente $\sqrt{\frac{3m+5}{1-m}} \leq -\frac{1}{m}$, où tout est positif, et qui donne elle-même $\frac{3m+5}{1-m} \leq \frac{1}{m^2}$. On peut multiplier par chacun des dénominateurs qui sont tous les deux positifs pour obtenir exactement la même inéquation qu'à la question précédente, qui est ici vérifiée sur tout l'intervalle $]-1, 0[$.

   (d) On a déjà prouvé que $x_2 \leq x_1$ sur cet intervalle (question a), reste à vérifier que $-\frac{1}{m} < x_1$. Si on reprend le calcul de la question c, comme $m+1 < 0$ ici, on obtiendra $x_2 > -\frac{1}{m} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3m+5}{1-m}} < -\frac{1}{m} \Leftrightarrow \frac{3m+5}{1-m} < \frac{1}{m^2} \Leftrightarrow 3m^3+5m^2+m-1 < 0$, ce qui est toujours vérifié dans notre intervalle (cf question b).

6. Commençons par constater que, quand elle a un sens, l'équation initiale implique (en passant tout au carré) l'équation $x^2+2x-3 = m^2x^2+2mx+1$, qui est exactement celle de la question 4. Les solutions obtenues à la question 4 doivnt d'une part exister, et vérifier $mx_1+1 \geq 0$ et/ou $mx_2+1 \geq 0$ pour être effectivement solutions de l'équation de départ (puisque dans ce cas les deux membres sont positifs, et les deux équations équivalents). On a effectué tous les calculs nécessaires lors des questions précédentes :
   - si $m < -\frac{5}{3}$ ou $m > 1$, l'équation ne peut pas avoir de solution.
   - Les cas particuliers $m = -1$, $m = 0$ et $m = 1$ ont été discutés plus haut : $\mathcal{S}_0 = \{-1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}\}$, $\mathcal{S}_1 = \emptyset$ et $\mathcal{S}_{-1} = \{1\}$.
   - si $m = -\frac{5}{3}$, l'équation admet une unique solution mais celle-ci ne vérifie pas $mx+1 \geq 0$, donc $\mathcal{S}_{-\frac{5}{3}} = \emptyset$.
   - si $-\frac{5}{3} < m < -1$, l'équation de la question 4 admet deux solutions pour lesquelles $mx+1 < 0$ (questions 3 et 5d), donc $\mathcal{S}_m = \emptyset$.
   - si $-1 < m < 0$, l'équation de la question 4 admet deux solutions qui vérifient toujours $x_1 \leq x_2 \leq -\frac{1}{m}$ (questions 5a et 5c), donc les deux solutions sont valables (cf question 3) et $\mathcal{S}_m = \{x_1, x_2\}$.
   - si $0 < m \leq \frac{1}{3}$, l'équation 4 admet toujours deux solutions qui vérifient $-\frac{1}{m} \leq x_1 \leq x_2$, et les deux solutions sont valables, donc $\mathcal{S}_m = \{x_1, x_2\}$.
   - enfin, si $\frac{1}{3} < m$, la solution x_1 ne sera pas valable (puisqu'elle sera inférieure à $-\frac{1}{m}$ d'après la question 5b), et il faut vérifier si x_2 est valable. Le même genre de calcul que ci-dessus (on reprend la question 5c en changeant le sens de l'inégalité quand on multiplie par m) permet de constater que c'est le cas : $\mathcal{S} = \{x_2\}$.
7. La fonction f est définie sur $]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$ (d'après le calcul effectué à la question 1), n'est pas dérivable en -3 et en 1 mais vérifie ailleurs $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$, ce qui prouve que f est strictement décroissante sur $]-\infty, -3]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. La fonction f est bien entendu positive partout où elle est définie, et s'annule en -3 et en 1. Ses limites en $\pm\infty$ sont égales à $+\infty$. Le seul calcul intéressant qu'on peut ajouter est celui de la présence d'éventuelles asymptotes obliques. Pour cel, on peut effectuer la factorisation suivante lorsque $x \geq 1$: $f(x) = \sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)} = x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}$. On en déduit que $f(x) - x = x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-1\right) = x \times \dfrac{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+1}$ en multipliant astucieusement en haut et en bas par la quantité conjuguée. Cela se simplifie très bien : $f(x)-x = \dfrac{2-\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+1}$, qui a pour limite $\frac{2}{2} = 1$ quand x tend vers $+\infty$ (il n'y a plus de forme indéterminée). La courbe représentative de f admet donc pour asymptote oblique en $+\infty$ la droite d'équation $y = x+1$. En $-\infty$, on peut faire quasiment le même calcul, en faisant attention au fait que, lorsque $x \leq -3$, $\sqrt{x^2} = -x$. C'est donc cette fois-ci $f(x)+x$ qu'on peut simplifier à coups de quantité conjuguée pour obtenir à nouveau une limite égale à -1 (là aussi le signe a changé). La droite d'équation $y = -x-1$ est donc asymptote oblique à la courbe en $-\infty$.

   Reste maintenant à interpréter les calculs effectués plus haut dans l'exercice : il s'agit simplement de déterminer le nombre de points d'intersection de la courbe représentative de f avec les droites d'ordonnée à l'origine égale à 1, en fonction de le leur coefficient directeur m. Sur la figure ci-dessous, on a tracé certaines de ces droites :
   - en bleu, pour $m = -1$, ce qui correspond à une parallèle à l'asymptote en $-\infty$ (tracée en

noir sur mon graphique) qui coupe la courbe en son point de coordonnées $(1, 0)$.

- en vert, un cas intermédiaire $m = -\dfrac{1}{2}$, où on a deux solutions valables (x_1 est la valeur négative, x_2 la valeur positive).
- en jaune, le cas $m = 0$ où la droite est horizontale, avec deux solutions.
- en orange (superbe couleur), le cas $m = \dfrac{1}{3}$ qui est le dernier pour lequel on a deux points d'intersections, le premier étant le point $(-3, 0)$.
- en violet, un cas $m = \dfrac{1}{2}$ où on n'a plus que la solution x_2 (positive) qui est valable.
- en marron, pour $m = 1$, on se retrouve sur la deuxième asymptote, à partir de là, il n'y aura plus de point d'intersection avec la courbe.