

Devoir Maison numéro 1

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 19 septembre 2017

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x(e^{\frac{1}{x}} - 2)$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition (on aura le droit de ne pas être très rigoureux notamment pour la limite en 0^+).
2. On pose $g(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} - 2$. Calculer la dérivée g' de la fonction g .
3. Dresser le tableau de variations complet de g et en déduire son signe.
4. Dérivée la fonction f , et en déduire son tableau de variations complet.
5. Calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) + x)$ (on pourra utiliser sans justification le résultat suivant : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$). En déduire la présence d'une asymptote oblique à la courbe représentative de f quand x tend vers $\pm\infty$.
6. Tracer une allure soignée de la courbe représentative de f .

Exercice 2

On cherche dans cet exercice à résoudre l'équation $(E_m) : \sqrt{x^2 + 2x - 3} = mx + 1$ suivant les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de x l'équation a-t-elle un sens ?
2. Résoudre l'équation lorsque $m = 1$ et lorsque $m = 0$.
3. Résoudre selon les valeurs de m l'inéquation $mx + 1 \geq 0$.
4. Résoudre suivant les valeurs de m l'équation $(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x + 4 = 0$.
5. Lorsque cela a un sens, on pose $x_1 = -\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+1}\sqrt{\frac{3m+5}{1-m}}$ et $x_2 = -\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1}\sqrt{\frac{3m+5}{1-m}}$.
 - (a) Comparer les réels x_1 et x_2 (on distinguera si besoin en fonction des valeurs prises par m).
 - (b) Lorsque $m \in]0, 1[$, montrer que $x_1 \geq -\frac{1}{m} \Leftrightarrow 3m^3 + 5m^2 + m - 1 \leq 0$. Résoudre cette dernière inéquation.
 - (c) Lorsque $m \in]-1, 0[$, résoudre l'inéquation $x_2 \leq -\frac{1}{m}$.
 - (d) Lorsque $m \in \left]-\frac{5}{3}, -1\right[$, montrer que $-\frac{1}{m} < x_2 \leq x_1$.
6. En vous aidant de toutes les questions précédentes, décrire les solutions de (E_m) selon les valeurs de m .
7. Étudier rapidement mais complètement la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x - 3}$, en tracer la courbe représentative, et interpréter graphiquement les résultats obtenus dans le reste du problème (une explication claire et un ou deux exemples sur la courbe suffiront).