AP n° 8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

23 mars 2018

Petits exercices indépendants sur les espaces vectoriels.

1. Le plus simple est de poser bêtement $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, et d'écrire les équations décrivant l'ensemble F sous la forme $d = 0$ et $\frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c + d = 0$ (oui, je vous fais confiance pour arriver à calculer l'intégrale correctement). C'est un système homogène d'équations linéaires qui décrit donc bien un sous-espace vectoriel de E, et on le résout très rapidement : $d = 0$ et $c = -\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b$, donc $P = aX^3 + bX^2 - \left(\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b\right) X$. Autrement dit, $F = \text{Vect}\left(X^3 - \frac{1}{2}X, X^2 - \frac{2}{3}X\right)$, et $\dim(F) = 2$ (les deux polynômes dans notre Vect sont non proportionnels donc forment une famille libre, et une base, de F).
2. Pour prouver que $G \subset F$, il suffit de prouver que les deux vecteurs de la base de G appartiennent à F (en effet, toutes leurs combinaisons linéaires appartiendront alors aussi à F), ce qui est bien le cas ici : $(1, 5, 2, -2) = \frac{1}{2}(3, 7, 1, -5) + \frac{1}{2}(-1, 3, 3, 1)$ et (on peut naturellement résoudre un système pour trouver ces coefficients) et $(2, 2, -1, -3) = \frac{1}{2}(3, 7, 1, -5) - \frac{1}{2}(-1, 3, 3, 1)$. Pour prouver l'inclusion réciproque $F \subset G$, on peut bien sûr recourir à la même méthode, ou encore plus simplement signaler que les deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de dimension 2, et donc égaux à partir du moment où l'un est inclus dans l'autre.
3. Supposons donc que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \sin^k(x) = 0$. Cette égalité doit être vérifiée pour tout réel x, et en particulier lorsque $x = \arcsin(u)$, avec $u \in [-1, 1]$. Mais celà signifie alors que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k u^k = 0$, on a donc un polynôme qui s'annule sur tout l'intervalle $[-1, 1]$. C'est largement suffisant pour assurer que tous ses coefficients sont nuls, ce qui prouve que notre famille est libre.
4. Comme il s'agit d'une famille de quatre vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4, il suffit de voir si elle est libre ou non. Soient donc quatre a, b, c et d tels que $a(1, 0, 0, 1) + b(-1, 1, 2, -2) + c(\alpha, 2, 1, 1) + d(2, -1, 1, 1) = 0$. On peut traduire cette égalité par le système $\left\{\begin{array}{ccccccccc} a & - & b+ & \alpha c & + & 2d & = & 0 \\ & & b & + & 2c & - & d & = & 0 \\ & & 2b & + & c & + & c & = & 0 \\ a & - & 2b & + & c & + & d & = & 0 \end{array}\right.$. La différence des deux dernières équations donne $a - 4b = 0$, soit $a = 4b$. En additionnant les deux équations intermédiaires, $3b + 3c = 0$, donc $c = -b$. La deuxième équation donne alors $d = b + 2c = -b$. Il ne reste plus qu'à tout reporter dans la première équation : $4b - b - \alpha b - 2b = 0$, donc $(1 - \alpha)b = 0$. Si $\alpha = 1$, cette équation est toujours vérifiée, et la famille n'est pas libre (on peut simplement exprimer les trois autres inconnues en fonctions de b, mais b prend une valeur quelconque). Par contre, si $\alpha \neq 1$, on a $b = 0$, et donc $a = c = d = 0$, donc la famille est libre (et c'est une base). Pour déterminer les coordonnées de $(1, 2, -1, 1)$, on doit cette fois résoudre le système

$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a & - & b+ & \alpha c & + & 2d & = & 1 \\ & & b & + & 2c & - & d & = & 2 \\ & & 2b & + & c & + & c & = & -1 \\ a & - & 2b & + & c & + & d & = & 1 \end{array}\right.$. On va bien sûr effectuer les mêmes opérations que tout à l'heure : $a - 4b = 2$, donc $a = 4b + 2$; $3b + 3c = 1$, donc $c = -b + \dfrac{1}{3}$; $d = -b + \dfrac{2}{3} - 2 = -b - \dfrac{4}{3}$. On reporte tout dans la première équation : $4b + 2 - b - \alpha b + \dfrac{\alpha}{3} - 2b - \dfrac{8}{3} = 1$, soit $b = \dfrac{5-\alpha}{3(1-\alpha)}$. On en déduit (calculs passionnants) que $a = \dfrac{26-10\alpha}{3(1-\alpha)}$; $c = \dfrac{-4}{3(1-\alpha)}$ et $d = \dfrac{-9+5\alpha}{3(1-\alpha)}$. Les coordonnées sont les quatre réels qu'on vient de calculer, ça n'a absolument aucun intérêt.

5. On va noter G le sous-ensemble constitué des fonctions impaires (dans l'énoncé, les deux étaient notés F par erreur). Les ensembles F et G sont facilement des sou-espaces vectoriels puisque la fonction nulle est à la fois paire et impaire, et qu'une somme ou un produit par une constantes de fonctions paires (respectivement impaires) reste paire (ou impaire). Il est facile de constater que $F \cap G = \{0\}$, une fonction qui est à la fois paire et impaire vérifie $f(x) = f(-x) = -f(x)$, donc $f(x) = 0$ quel que soit le réel x. La condition $F + G = E$ est plus compliquée, mais on est obligés d'en passer par là dans un espace vectoriel qui est de dimension infinie. En fait, on peut utiliser une espèce d'astuce belge comme pour les ensembles de matrices symétriques et anti-symétriques : $f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$. Or, en posant $g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, la fonction g est paire (c'est un calcul trivial), et en posant $h(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$, la fonction h est impaire (même calcul débile). On a donc réussi à écrire $f = g + h$, avec $g \in F$ et $h \in G$, pour une fonction f quelconque dans E. On a donc prouvé que $F + G = E$, et F et G sont bien des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
   Pour résoudre l'équation $f''(x) + f(-x) = x$, on pose $f = g + h$, avec g paire et h impaire, comme on l'a vu ci-dessus. Comme f est deux fois dérivable, g et h le seront aussi, et on aura g'' paire et h'' impaire (la dérivée d'une fonction paire étant impaire, et vice-versa, on retombe sur nos pieds après deux dérivations). On est alors ramenés à résoudre l'équation $g''(x) + h''(x) + g(x) - h(x) = x$. Or, la fonction $x \mapsto x$ est impaire, et sa décomposition en tant que somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire est unique (c'est une conséquence de la supplémentarité prouvée plus haut), on peut donc « découper » l'équation en deux morceaux : $g''(x) + g(x) = 0$ (partie paire), et $h''(x) - h(x) = x$ (partie impaire). D'un côté, on obtient $g(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. La fonction g étant paire par hypothèse, on doit avoir $B = 0$, donc $g(x) = A\cos(x)$. De l'autre côté, $x \mapsto -x$ est solution particulière triviale de l'équation et on en déduit que $h(x) = C\,\mathrm{ch}(x) + D\,\mathrm{sh}(x) - x$, avec $(C, D) \in \mathbb{R}^2$. Comme cette fois-ci on veut que h soit impaire, celà impose $C = 0$, soit $h(x) = D\,\mathrm{sh}(x) - x$. Finalement, on a nécessairement $f(x) = A\cos(x) + D\,\mathrm{sh}(x) - x$, avec $(A, D) \in \mathbb{R}^2$. Réciproquement, ces fonctions sont toutes solutions du problème posé.

Le jeu du sous-espace vectoriel, le retour !

1. Il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel, les trois conditions étant vérifiées de façon évidentes. Alternativement, on peut d'ailleurs dire que l'ensemble est défini par les trois équations $a = b = c = 0$ (en notant les coefficients de la matrice M de a à i, comme d'habitude), ce qui forme un système d'équations linéaires homogène sur les coefficients de la matrice, l'ensemble de ses solutions est donc un sous-espace vectoriel. Ce sous-espace est bien entendu de dimension 6, on peut choisir comme on le veut les six coefficients restants de la matrice (si on tient à en

donner une base, on prend tout bêtement les six dernières matrices de la base canonique de E).

2. La matrice nulle vérifie certainement cette condition, et notre ensemble est stable par produit par un réel. Mais il n'est pas stable par somme : par exemple dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont toutes les deux dans l'ensemble, mais pas leur somme. Il est facile de créer des exemples similaires quel que soit l'entier n.
3. Il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel, et plus précisément de la droite vectorielle engendrée par l'unique matrice M dont tous les coefficients sont égaux à 1. Du coup, c'est un sous-espace de dimension 1 (quelle que soit la valeur de n).
4. La matrice nulle ne vérifiant même pas la condition, on peut passer tout de suite au suivant (par ailleurs, l'ensemble n'est stable ni par somme ni par produit par un réel).
5. Celui-ci est un sous-espace vectoriel, ce qu'on prouve en revenant à la caractérisation habituelle : on a toujours $0A = 0$, donc la matrice nulle appartient à l'ensemble. De plus, si $MA = 0$, alors $\lambda MA = 0$, et si en plus $NA = 0$, alors $(M + N)A = MA + NA = 0$. La dimension dépend en fait de la matrice A. Par exemple, si A est la matrice nulle (ce n'est pas interdit), le sous-espace est égal à E tout entier. Au contraire, si $A = I$ (ou même si A est une matrice inversible quelconque), seule la matrice nulle vérifiera la condition. Si A est une matrice non nulle et non inversible, la dimension se trouvera quelque part entre 0 et 9 (toutes les dimensions ne sont pas possibles, mais c'est un peu trop compliqué à expliquer).
6. Aucun problème ici, la matrice nulle vérifie la condition, et l'ensemble est stable par somme et produit par un réel (ce qui découle de ce qu'on appellera très bientôt la linéarité de la transposition). Si on note de a à i les coefficients de la matrice, on constate immédiatement que les coefficients diagonaux a, e et i doivent être nuls (puisqu'ils doivent être leur propres doubles !) et que les autres doivent vérifier les conditions $d = 2b$, $g = 2c$ et $h = 2f$. La matrice est donc déterminée par le choix indépendant de ses trois coefficients b, c et f, et le sous-espace est de dimension 3.
7. Celui-ci n'est pas du tout un sous-espace vectoriel, la matrice nulle ne vérifie même pas cette condition.
8. Ici, ça marche ! Bien entendu, $P^{-1} \times 0 \times P$ est nulle donc diagonale, multiplier par λ ou additionner deux matrices revient simplement à effectuer la même opération sur les matrices diagonales à l'arrivée, ce qui donnera clairement des matrices diagonales. La dimension est en fait facile à calculer : M est dans l'ensemble si et seulement si M s'écrit sous la forme PDP^{-1}, où D est une matrice diagonale. Comme l'ensemble des matrices diagonales est un sous-espace vectoriel de dimension 3 (engendré par les trois matrices E_{11}, E_{22} et E_{33}, en prenant les notations du cours), notre sous-ensemble est également de dimansion 3, engendré par les trois matrices $P^{-1}E_{11}P$, $P^{-1}E_{22}P$ et $P^{-1}E_{33}P$ (qui forment bien une famille libre, si ce n'était pas le cas, une combinaison linéaire nulle de ces trois matrices donnerait la même combinaison nulle sur E_{11}, E_{22} et E_{33} en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}).

Exercice

1. Il faut déterminer si la famille génératrice de G qui nous est fournie est une famille libre. En fait, on peut voir presque immédiatement que ce n'est pas le cas puisque la somme des deux vecteurs extrêmes donne celui du milieu : $(1, -1, 2, -2) + (3, 1, -1, -3) = (4, 0, 1, -5)$. On peut donc supprimet un vecteur de la famille (par exemple) le dernier tout en la laissant génératrice. Ce sera alors une base de G (les deux vecteurs restants ne sont pas proportionnels, donc ils forment une famille libre et donc une base de G). Conclusion : $\dim(G) = 2$.
2. Il suffit de résoudre le système définissant F, en exprimant par exemple y et z en fonction de x et de t : $y = -x$ et $z = y - x - 2t = -2x - 2t$, donc $F = \{(x, -x, -2x - 2t, t) \mid (x, t) \in \mathbb{R}^2\} =$

Vect$((1,-1,-2,0);(0,0,-2,1))$. La famille génératrice obtenue est manifestement libre (les deux vecteurs ne sont pas proportionnels), donc $\dim(F) = 2$.

3. Supposons qu'un vecteur (x,y,z,t) appartienne à $G \cap F$, alors d'après la question 1, on a $(x,y,z,t) = a(1,-1,2,-2) + b(4,0,1,-5) = (a+4b, -a, 2a+b, -2a-5b)$, avec $-a, b) \in \mathbb{R}^2$. On doit de plus avoir, en revenant aux équations définissant F, $a + 4b - a = 0$, donc $b = 0$, et $a + 4b + a + 2a + b - 4a - 10b = 0$, soit $0 = 0$ une fois qu'on a imposé $b = 0$. Tous les vecteurs de la forme $a(1,-1,2,-2)$ appartiennent donc à la fois à F et à G, ce qui prouve que $F \cap G = \text{Vect}((1,-1,2,-2))$, et en particulier que $\dim(F \cap G) = 1$. Une application directe de la formule de Grassmann donne alors $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 1 = 3$.
4. Il faudrait donc trouver un sous-espace H de dimension 1, donc engendré par un unique vecteur qui n'appartienne pas à $F + G$ (celà suffira à assurer que l'intersection de H et de $F + G$ est réduite au vecteur nul, et donc qu'ils sont supplémentaires dans E vu leur dimension). Considérons donc le vecteur $u = (0,0,1,0)$, et supposons que $u \in F + G$, donc $u = a(1,-1,2,-2) + b(4,0,1,-5) + c(1,-1,-2,0) + d(0,0,-2,1)$, alors on a $-a-c = 0$ (deuxième coordonnée) donc $c = -a$; puis $-2a - 5b + d = 0$, donc $d = 2a + 5b$ (quatrième coordonnée). Regardons alors ce que donne la première coordonnée : $a + 4b + c = 0$, soit $a + 4b - a = 0$, et donc $b = 0$, d'où $d = 2a$. On devrait alors avoir $2a + b - 2c - 2d = 1$, soit $2a + 2a - 4a = 1$, ce qui pose un problème manifeste. Le sous-espace vectoriel $H + \text{Vect}(u)$ est donc une solution au problème posé.