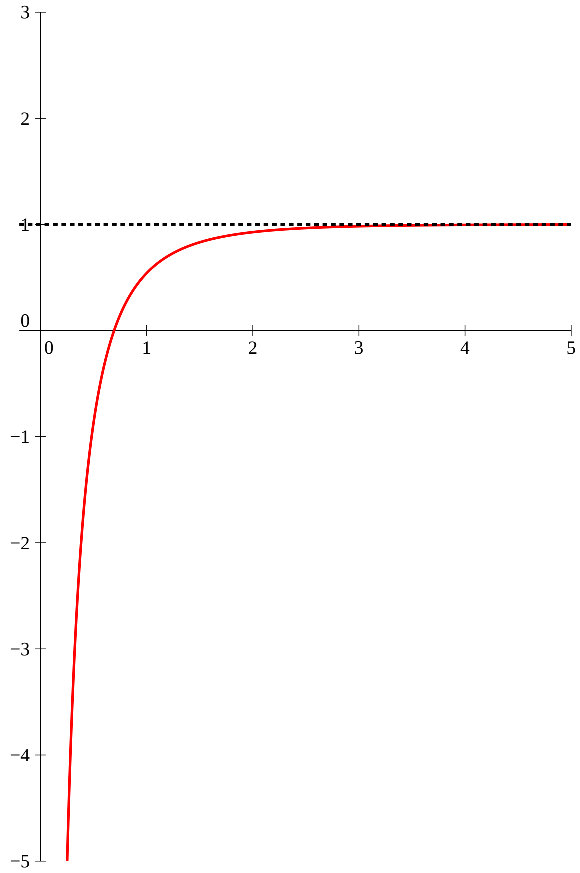
AP n°6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

26 janvier 2018

Fonctions usuelles

La fonction f est définie (et continue, dérivable, et tout ce qu'on veut) sur $\mathbb{R}^{+*}$ puisqu'on doit avoir $e^x > 1$ pour que le logarithme du numérateur soit défini. Sa dérivée est donnée par $f'(x) = \dfrac{\frac{xe^x}{e^x-1} - \ln(e^x - 1)}{x^2}$, elle est du signe de $g(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1} - \ln(e^x - 1)$. Cette fonction auxiliaire est elle-même dérivable, et $g'(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1} + x\dfrac{e^x(e^x - 1) - e^{2x}}{(e^x - 1)^2} - \dfrac{e^x}{e^x - 1} = -\dfrac{x}{(e^x - 1)^2}$, qui est toujours négatif sur $\mathcal{D}_f$. La dérivée f' est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. De plus, $g(x) = x\left(\dfrac{e^x}{e^x - 1} - \dfrac{\ln(e^x - 1)}{x}\right) = xh(x)$, et comme $\ln(e^x - 1) = x + \ln(1 - e^{-x})$, on calcule sans trop de difficulté que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$. Or, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$ a donc également une limite nulle en $+\infty$, ce qui prouve que cette fonction est toujours positive. La fonction f est donc croissante sur son ensemble de définition. De plus, $f(x) = \dfrac{x + \ln(1 - e^{-x})}{x}$, ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. De l'autre côté, il n'y a pas de forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. On peut enfin ajouter que la fonction f s'annule lorsque $x = \ln(2)$ (puisqu'on a alors $e^x - 1 = 1$). Voici une allure de sa courbe représentative :

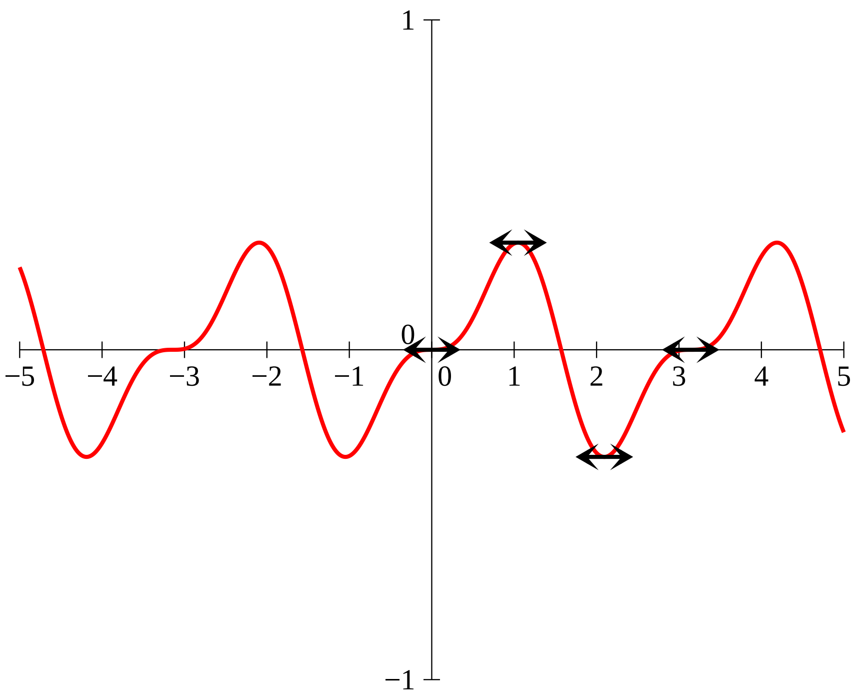


Trigonométrie

La fonction f est bien évidemment définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est par ailleurs 2π-périodique et impaire, on peut donc se contenter de l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi]$. On calcule $f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) - \cos^4(x) + 3\sin^2(x)\cos^2(x) = \cos^2(x) - 1 + \cos^2(x) - \cos^4(x) + 3\cos^2(x) - 3\cos^4(x) = -4\cos^4(x) + 5\cos^2(x) - 1$. On pose $X = \cos^2(x)$, et on est ramenés à l'étude du signe de $-4X^2 + 5X - 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 25 - 16 = 9$, et pour racines $X_1 = \dfrac{-5-3}{-8} = 1$ et $X_2 = \dfrac{-5+3}{-8} = \dfrac{1}{4}$. La dérivée est donc positive lorsque $X \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$, c'est-à-dire lorsque $\cos(x) \in \left[-1, -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. Sur l'intervalle $[0, \pi]$, la dérivée est donc positive si $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right]$. Elle s'annule également en 0 et en π, où les tangentes à la courbe seront horizontales. On calcule $f(0) = 0 = f(\pi)$; $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{8} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$, et de même $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$. Enfin, comme $f(x) = \sin(x)\cos(x)(1 - \cos^2(x)) = \sin^3(x)\cos(x)$ (une forme plus pratique pour étudier les variations, d'ailleurs), la fonction s'annule également (sur notre intervalle d'étude) en $\dfrac{\pi}{2}$. On peut dresser le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
f	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\nearrow$	0

Une allure de la courbe :



Calcul

1. Il suffit d'étudier sur $[0, 1]$ la fonction définie par $f(t) = t(1-t) = t - t^2$, qui a pour dérivée $f'(t) = 1 - 2t$. Les variations de f sont évidentes : elle est décroissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et croissante

ensuite et admet donc pour minimum $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, ce qui prouve exactement l'inégalité souhaitée.

2. En posant $t = \frac{k}{n+1}$, on a $1-t = \frac{n+1-k}{n+1}$, et la question précédente permet alors d'affirmer que $\frac{k(n+1-k)}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{4}$, soit $k(n+1-k) \leqslant \frac{(n+1)^2}{4}$.

3. C'est évident : $\prod_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \prod_{k=1}^{n} k \times \prod_{k=1}^{n} n+1-k = n! \times \prod_{i=1}^{n} i = (n!)^2$ en posant $i = n+1-k$.

4. En utilisant la question 2, le produit de la question 3 est majoré par $\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$, donc $(n!)^2 \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$, et $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}$.

   Pour la minoration, le mieux est de tout passer au ln et de prouver que $n\ln(\sqrt{n}) \leqslant \ln(n!)$, soit $\frac{1}{2}n\ln(n) \leqslant \ln(n!)$, ou encore $n\ln(n) \leqslant \ln(n!)^2$. En utilisant la question 3, il faut donc prouver que $n\ln(n) \leqslant \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k(n+1-k))$. Il suffit notamment de prouver que chacun des termes de la somme de droite est plus grand que $\ln(n)$ pour conclure, ce qui revient à prouver que $k(n+1-k) \geqslant n$, ou encore que $kn + k - k^2 - n \geqslant 0$. Or, notre membre de gauche peut s'écrire $n(k-1) + k(1-k) = (k-1)(n-k)$, qui est bien positif. On a donc prouvé la deuxième inégalité demandée.

Intégrales

Il faut effectuer une décomposition en éléments simples, et pour cela commencer par factoriser le dénominateur. On peut constater que celui-ci s'écrit sous la forme $x^2(x-2)+x-2 = (x^2+1)(x-2)$ (ou, si on a du temps à perdre, trouver 2 comme racine évidente et factoriser ensuite). On peut donc écrire $\frac{5x^2-3x+1}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{a}{x-2} + \frac{bx+c}{x^2+1}$. En multipliant tout par $x-2$ puis en prenant $x = 2$, on trouve $\frac{15}{5} = a$, soit $a = 3$. En posant ensuite $x = 0$ dans l'égalité, on a la deuxième relation $-\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + c$, soit $c = 1$. Enfin, on peut tout multiplier par x et prendre la limite en $+\infty$ pour avoir $5 = 3 + a$, donc $a = 2$. Conclusion : $\frac{5x^2-3x+1}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{3}{x-2} + \frac{2x+1}{x^2+1}$. Il ne reste plus qu'à calculer l'intégrale : $\int_0^1 \frac{3}{x-2} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\,dx = [3\ln(2-x) + \ln(x^2+1) + \arctan(x)]_0^1 = -3\ln(2) + \ln(2) + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 2\ln(2)$ (qui est négatif, ce qui est normal).

Équations différentielles

1. Posons donc $y_p(x) = e^{ax}$, donc $y_p'(x) = ae^{ax}$ et $y_p''(x) = a^2e^{ax}$. En remplaçant dans l'équation différentielle et en simplifiant par e^{ax}, on trouve la condition $a^2(1+2x) + a(4x-2) - 8 = 0$. Par identification, on a donc les deux conditions $2a^2 + 4a = 0$ et $a^2 - 2a - 8 = 0$. On constate facilement que $a = -2$ est solution commune aux deux équations, et donc que $y_p(x) = e^{-2x}$ convient.

2. Calculons à nouveau : si $y(x) = e^{-2x}z$, alors $y'(x) = -2e^{-2x}z + e^{-2x}z'$, puis $y''(x) = 4e^{-2x}z - 4e^{-2x}z' + e^{-2x}z''$. On insère le tout dans l'équation en simplifiant par e^{-2x} pour obtenir $(1+2x)(4z-4z'+z'') + (4x-2)(-2z+z') - 8z = 0$, soit $(1+2x)z'' - (6+4x)z' = 0$ (les termes en z disparaissent, c'était le but de la manoeuvre).

3. Posons $w = z'$, on s'est donc ramenés à la résolution de l'équation $(1+2x)w' - (6+4x)w = 0$, soit $w' - \frac{6+4x}{1+2x}w = 0$ (on peut normaliser sans problème sur l'intervalle de résolution imposé par l'énoncé). On remarque que $\frac{6+4x}{1+2x} = \frac{2+4x}{1+2x} + \frac{4}{1+2x} = 2 + \frac{4}{1+2x}$, donc une primitive de $\frac{6+4x}{1+2x}$ est $2x + 2\ln(2x+1)$. L'équation étant homogène, on en déduit directement que $w(x) = Ke^{2x+2\ln(2x+1)} = Ke^{2x}(1+2x)^2$, pour une constante $K \in \mathbb{R}$. Il ne reste plus qu'à primitiver pour trouver $z(x) = K\int e^{2x}(1+2x)^2\ dx$. On peut effectuer une IPP en posant $u(x) = (1+2x)^2$, donc $u'(x) = 4(1+2x)$, et $v'(x) = e^{2x}$, donc $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$. On obtient $z(x) = \frac{K}{2}e^{2x}(1+2x)^2 - K\int 2e^{2x}(1+2x)\ dx$. On fait une deuxième IPP et on finit par obtenir $z(x) = \frac{K}{2}e^{2x}(1+2x)^2 - Ke^{2x}(1+2x) + K\int 2e^{2x}\ dx = e^{2x}\left(\frac{K}{2}(1+2x)^2 - K(1+2x) + K\right) = \frac{Ke^{2x}}{2}(4x^2+1)$. Pour obtenir toutes les fonctions z convenables, il reste à ajouter une nouvelle constante réelle : $z(x) = \frac{Ke^{2x}}{2}(4x^2+1) + L$. Enfin, on remonte à y en multipliant le tout par e^{-2x} : les solutions de l'équation initiale sont de la forme $y(x) = \frac{K}{2}(4x^2+1) + Le^{-2x}$ (on peut bien sûr modifier la constante K pour se débarasser du 2 au dénominateur).

Complexes et trigonométrie

1. On peut écrire l'équation sous la forme $\left(\frac{z+1}{e^{2ia}}\right)^n = 1$. On sait que les racines n-èmes de l'unité sont de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, donc $\frac{z_k+1}{e^{2ia}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, puis $z_k + 1 = e^{i(\frac{2k\pi}{n}+2a)}$, et $z_k = e^{i(\frac{2k\pi}{n}+2a)} - 1$, pour les valeurs entières de k comprises entre 0 et $n-1$. On peut factoriser par l'angle moitié : $z_k = e^{i(a+\frac{k\pi}{n})}(e^{i(a+\frac{k\pi}{n})} - e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})}) = 2i\sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)e^{i(a+\frac{k\pi}{n})}$.
2. La formule obtenue à la question précédente donne envie de calculer $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = \prod_{k=0}^{n-1} 2i\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)e^{i(a+\frac{k\pi}{n})} = 2^n i^n P_n e^{i\sum_{k=0}^{n-1} a+\frac{k\pi}{n}} = 2^n i^n e^{ina}e^{i(n-1)\frac{\pi}{2}}P_n$. On peut remarquer que la dernière exponentielle vaut i^{n-1} (puisque $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$) pour simplifier le produit en $2^n i^{2n-1}e^{ina}P_n$. Par ailleurs, on sait que $\prod_{k=0}^{n-1} z_k$ est le produit des racines de l'équation $(z+1)^n - e^{2ina} = 0$, dont le coefficient constant vaut $1 - e^{2ina}$. Comme le membre de gauche de l'équation peut se factoriser sous la forme $\prod_{k=0}^{n-1} z - z_k$, ce coefficient constant vaut aussi $(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} z_k$. On en déduit que $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = (-1)^n(1-e^{2ina})$.
Reste à conclure : $P_n = \frac{(-1)^n(1-e^{2ina})}{2^n i^{2n-1}e^{ina}}$. On peut simplifier i^{2n} et $(-1)^n$, et factoriser par l'angle moitié le numérateur : $P_n = \frac{e^{ina}(e^{-ina}-e^{ina})}{2^n i^{-1}e^{ina}} = \frac{i(-2i\sin(na))}{2^n} = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}$.
On peut par exemple vérifier la formule pour $n = 2$, le produit de sinus vaut alors $\sin(a)\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right) = \sin(a)\cos(a) = \frac{\sin(2a)}{2}$.