AP n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

2 février 2018

Exercice 1

1. On peut tout faire d'un seul coup en exhibant la réciproque (si elle existe, c'est nécessairement que f est bijective). Notons donc $Z = f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}+i}$, alors $Z\bar{z} + iZ = 1$, donc $\bar{z} = \dfrac{1-iZ}{Z}$ (si $Z \neq 0$), et $z = \dfrac{1+i\bar{Z}}{\bar{Z}} = \dfrac{1}{\bar{Z}} + i$. Tout nombre complexe Z non nul admet donc un unique antécédent par f dans $\mathbb{C}\backslash\{i\}$. L'application f est bijective, et $f^{-1}(z) = \dfrac{1}{\bar{z}} + i$.

2. (a) En posant $z = a + ib$, on trouve $f(z) = \dfrac{1}{a - ib + i} = \dfrac{a + i(b-1)}{a^2 + (1-b)^2} = \dfrac{a}{a^2+(1-b)^2} + \dfrac{b-1}{a^2+(1-b)^2}i$.

   (b) Au vu de la formule précédente, $f(z) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $b-1 = 0$, soit $b = 1$. Autrement dit, z est de la forme $a + i$, et se trouve dans le plan complexe sur la droite horizontale d'équation $y = 1$ (on doit enlever tout de même $z = i$, valeur pour laquelle la fonction n'est pas définie).

   (c) Cette fois-ci, on obtient encore plus simplement $a = 0$, donc z doit être lui-même imaginaire pur (sur l'axe des ordonnées dans le plan complexe), en éliminant bien sûr la valeur interdite $z = i$.

   (d) Soit à partir de la forme algébrique, soit directement sous la forme $\dfrac{1}{\bar{z}+i}$, on voit que $|f(z)| = 1$ est équivalent à $a^2 + (b-1)^2 = 1$. Même pas la peine de modifier quoi que ce soit, on reconnait immédiatement le cercle de centre $A(i)$ et de rayon 1.

3. (a) Si $z = ki$, avec k un nombre réel, on aura $f(z) = \dfrac{1}{-ki+i} = \dfrac{i}{k-1}$ qui est encore imaginaire pur. Réciproquement, on a déjà vu que tous les imaginaires purs (sauf 0) ont un antécédent imaginaire pur par f. On en déduit que $f(i\mathbb{R}\backslash\{i\}) = i\mathbb{R}^*$.

   (b) Soit $z = x$ appartenant à $\mathbb{R}$, alors $f(z) = \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{1}{x^2+1}i$. Pour vérifier que ce nombre a une image située sur le cercle de l'énoncé, il suffit de calculer sa distance au point A, soit $\left|f(z) + \dfrac{i}{2}\right| = \left|\dfrac{x}{x^2+1} + i\dfrac{x^2+1-2}{2(x^2+1)}\right| = \sqrt{\dfrac{4x^2+x^4-2x^2+1}{4(x^2+1)^2}} = \sqrt{\dfrac{(x^2+1)^2}{4(x^2+1)^2}} = \dfrac{1}{2}$. Le point est bien sur le cercle voulu, mais il faudrait maintenant prouver réciproquement que tout point de ce cercle a un antécédent réel. Un point sur ce cercle a pour affixe un nombre complexe de la forme $\dfrac{-i}{2} + \dfrac{e^{i\theta}}{2}$ (avec $\theta \not\equiv 0[2\pi]$). On peut alors écrire $f^{-1}(z) = \dfrac{1}{\bar{z}} + i = \dfrac{2}{i+e^{-i\theta}} + i = \dfrac{1+ie^{-i\theta}}{i+e^{-i\theta}} = \dfrac{(1+ie^{-i\theta})(e^{i\theta}-i)}{|i+e^{-i\theta}|^2} = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{|i+e^{-i\theta}|^2} \in \mathbb{R}$ (on reconnait au numérateur $2\cos(\theta)$ via les formules d'Euler).

   (c) On va tenter ici de partir de la réciproque de f, et de donner une condition pour que $f^{-1}(z) \in \mathbb{U}$. En notant $Z = a + ib$, on a $f^{-1}(Z) = \dfrac{1}{a-ib} + i = \dfrac{1+ia+b}{a-ib}$. On en déduit que $|f^{-1}(Z)|^2 = \dfrac{(b+1)^2+a^2}{a^2+b^2}$. Puisqu'on veut que ce module soit égal à 1, on trouve la condition $(b+1)^2+a^2 = a^2+b^2$, soit $2b+1=0$, donc $b = -\dfrac{1}{2}$. Les images des nombres complexes appartenant à $\mathbb{U}$ sont donc situées sur la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$ (et on a prouvé la réciproque au passage, la condition étant une équivalence).

4. (a) Cette équation revient à dire que $(-\bar{z}+\sqrt{3})(\bar{z}+i) = 1$, soit $-\bar{z}^2+(\sqrt{3}-i)\bar{z}+i\sqrt{3}-1 = 0$. Posons $Z = \bar{z}$, et résolvons l'équation du second degré $Z^2+(i-\sqrt{3})Z+1-i\sqrt{3} = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = (i-\sqrt{3})^2-4(1-i\sqrt{3}) = -1-2i\sqrt{3}+3-4+4i\sqrt{3} = -2+2i\sqrt{3} = 4\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On en déduit immédiatement les deux valeurs possibles de δ vérifiant $\delta^2 = \Delta$: $\delta = \pm 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. On peut donc, par exemple, prendre $\delta = 1+i\sqrt{3}$. On trouve alors comme solutions de notre équation $Z_1 = \dfrac{\sqrt{3}-i+\delta}{2} = \dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}+2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{12}}(e^{-i\frac{\pi}{4}}+e^{i\frac{\pi}{4}}) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ (on a utilisé une variante de la factorisation par l'angle moitié pour la fin du calcul). De même, on obtient $Z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}}-e^{i\frac{\pi}{3}} = -2i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{2})} = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$. Il ne reste plus qu'à passer au conjugué pour retrouver les valeurs de z : $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

   (b) On veut donc avoir $\dfrac{1}{\bar{z}+i} = z$, soit $z\bar{z}+iz = 1$, ou encore $iz = 1-|z|^2$. En particulier, iz doit être réel, ce qui implique que z lui-même est imaginaire pur, de la forme bi. L'équation devient alors $-b = 1-b^2$, ou encore $b^2-b-1=0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 1+4 = 5$ et pour racines $b = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Les deux points fixes de la fonction f sont donc $z_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}i$ et $z_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}i$.

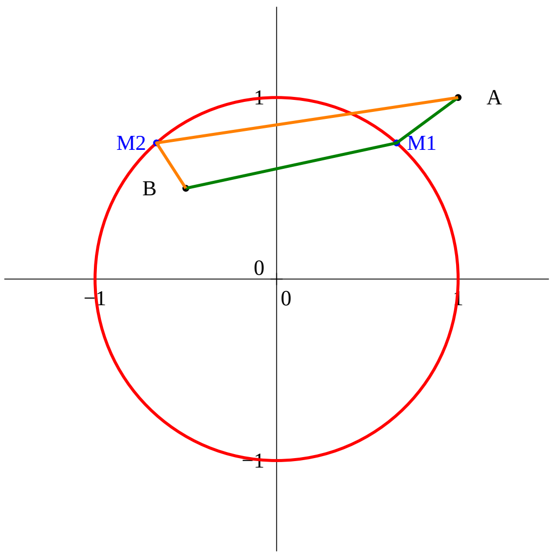
Exercice 2

1. On peut écrire $-4 = 4e^{i\pi}$ et en déduire immédiatement les racines quatrièmes : $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1+i$; $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1+i$; $z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = -1-i$; et $z_4 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = 1-i$.
2. C'est une conséquence triviale de la factorisation par l'angle moitié. On peut aussi partir du membre de droite pour se fatiguer encore moins : $2ie^{i\alpha}\sin(\alpha) = e^{i\alpha}(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}) = e^{2i\alpha}-1$.
3. Calculons donc : $MA = |z_M - z_A| = |e^{i\alpha}-1-i| = \sqrt{(\cos(\alpha)-1)^2+(\sin(\alpha)-1)^2} = \sqrt{3-2\cos(\alpha)-2\sin(\alpha)}$. De même, $MB = \left|e^{i\alpha}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\cos(\alpha)+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\sin(\alpha)-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{2}+\cos(\alpha)-\sin(\alpha)}$. Il ne reste plus qu'à faire le produit $MA\times MB = \sqrt{\dfrac{9}{2}+3\cos(\alpha)-3\sin(\alpha)-3\cos(\alpha)-2\cos^2(\alpha)+2\cos(\alpha)\sin(\alpha)-3\sin(\alpha)-2\sin(\alpha)\cos(\alpha)+2\sin^2(\alpha)}$ $= \sqrt{\dfrac{9}{2}-6\sin(\alpha)-2+4\sin^2(\alpha)} = \sqrt{\dfrac{5}{2}-6\sin(\alpha)+4\sin^2(\alpha)}$. En mettant sous forme canonique ce qui se trouve sous la racine, on trouve sans grande surprise $MA\times MB = f(\alpha)$, où f est la fonction définie à la question suivante.
4. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, et la racine carrée ne changera rien aux variations. Elle est par ailleurs 2π-périodique, on va donc étudier sur $[-\pi,\pi]$ les variations de $g : \alpha \mapsto \dfrac{1}{4}+\left(2\sin(\alpha)-\dfrac{3}{2}\right)^2$. On calcule donc $g'(\alpha) = 4\cos(\alpha)\left(2\sin(\alpha)-\dfrac{3}{2}\right)$. Cette dérivée s'annule en $\pm\dfrac{\pi}{2}$ et lorsque $\sin(\alpha) = \dfrac{3}{4}$, ce qui se produit deux fois entre 0 et π. On notera $\alpha_1 =$

$\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{2}$, et $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 > \frac{\pi}{2}$. L'étude du signe ne pose pas de problème, la parenthèse n'étant positive qu'entre α_1 et α_2. On aura bien sûr $g(\alpha_1) = g(\alpha_2) = \frac{1}{4}$, et donc $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = \frac{1}{2}$; $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, donc $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; et $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{49}{4} = \frac{25}{2}$, donc $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}$. On peut ajouter les valeurs $g(\pi) = g(-\pi) = g(0) = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}$ pour compléter le tableau de variations suivant :

α	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		α_1		$\frac{\pi}{2}$		α_2		π
f	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\nearrow$	$\frac{5}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$

5. Il n'y plus rien à faire : les points du cercle trigonométrique sont exactement ceux d'affixe $e^{i\alpha}$ et on vient de prouver qu'il y a deux valeurs de α (modulo 2π) pour lesquelles le produit de distances $MA \times MB$ est minimal. On peut même donner facilement les coordonnées des deux points correspondants puisqu'on sait qu'ils ont pour ordonnée $\frac{3}{4}$: ils vérifient $\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$, soit $\cos(\alpha) = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$. On trouve donc $M_1\left(\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4}\right)$ et $M_2\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4}\right)$. Dans les deux cas, on a $MA \times MB = \frac{1}{2}$.
6. Bon, pas grand chose à mettre sur la figure :



Exercice 3

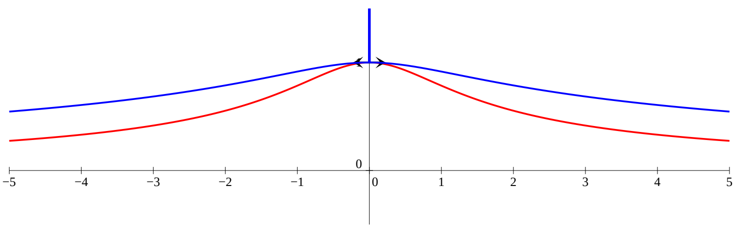
1. (a) Seule la continuité en 0 peut poser problème. On reconnait dans la formule $\frac{\arctan(t)}{t}$ le taux d'accroissement de la fonction arctan en 0 (puisque $\arctan(0) = 0$), qui admet donc pour limite en 0 le réel $\arctan'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1 = f(0)$. La fonction f est donc bien continue en 0. La parité de la fonction est évidente puisque arctan est impaire.

(b) On ne dipose pas encore des outils pour traiter très rigoureusement cette question, on va donc un peu pipoter. Partons de la dérivée d'arctangente, qui est égale à $\dfrac{1}{1+x^2}$. Nous savons tous que la somme géométrique $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ va se « rapprocher » de $\dfrac{1}{1-x}$ quand n tend vers $+\infty$ et quand x est suffisamment proche de 0. Une façon d'écrire les choses est de dire que $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$, avec $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ (c'est ce qu'on appelle le développement limité à l'ordre 2 de $\dfrac{1}{1-x}$ en 0). Quitte à changer le signe, on peut de même écrire $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$ (la fonction ε n'est plus exactement la même, ça n'a aucune importance, on veut juste qu'elle ait une limite nulle en 0). Quitte à remplacer maintenant x par x^2 (qui tend lui aussi vers 0), on trouve enfin $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + x^4\varepsilon(x)$. Admettons joyeusement qu'on a le droit de primitiver tout ça (ave une constante d'intégration nulle puisque $\arctan(0) = 0$ et déduisons-en que $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x)$. En divisant par x (et en oubliant le troisième terme qui ne sert en fait à rien), on trouve alors $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)$. En fait, même le deuxième terme n'est pas utile pour obtenir un développement limité à l'ordre 1 : $f(x) = 1 + x\varepsilon(x)$, avec $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, ce qui prouve que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$ (il n'y a pas de terme en x dans le développement limité).

(c) Ailleurs qu'en 0, aucun problème : $f'(t) = \dfrac{\frac{t}{1+t^2} - \arctan(t)}{t^2} = \dfrac{t - (1+t^2)\arctan(t)}{t^2(1+t^2)}$.

(d) On peut faire une intégration par partie que t soit positif ou négatif (c'est important pour la suite !) en posant intelligemment $v'(w) = \dfrac{w}{(1+w^2)^2}$, pour avoir $v(w) = \frac{-1}{2(1+w^2)}$, et $u(w) = w$ qui donne évidemment $u'(w) = 1$. On trouve alors $\displaystyle\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\, dw = \left[-\frac{w}{1+w^2}\right]_0^t + \int_0^t \frac{1}{2(1+w^2)}\, dw = -\frac{1}{2} \times \frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\arctan(t) = -\frac{1}{2}t^2 f'(t)$. La dérivée $f'(t)$ est donc de signe opposé à l'intégrale calculée, qui est elle-même l'intégrale d'une fonction manifestement positive. Attention quand même à l'ordre des bonnes : si $t > 0$, les bornes sont dans le bon sens, donc l'intégrale est positive, et $f'(t) < 0$, mais si $t < 0$, au contraire, on aura $f'(t) > 0$. La fonction f est donc croissante sur $]-\infty, 0[$ et décroissante sur $]0, +\infty[$.

(e) Les limites de f en $\pm\infty$ sont nulles puisque $\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty} \arctan(t) = \pm\frac{\pi}{2}$. On a une allure de courbe qui ressemble à ceci (la courbe de la fonction φ étudiée ensuite apparait sur ce même graphique) :



2. (a) La continuité ne peut poser problème qu'en 0, mais comme $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ est la primitive de la fonction f s'annulant en 0, on reconnait dans φ le taux d'accroissement de cette

primitive en 0, qui par définition de la dérivée a pour limite $f(0) = 1 = \varphi(0)$, donc φ est continue en 0. De plus, en effectuant le changement de variable $u = -t$, on trouve que $\displaystyle\int_0^{-x} f(t)\ dt = \int_0^x f(-t) \times (-\ dt) = -\int_0^x f(t)\ dt$ car la fonction f est paire. On en déduit la parité de la fonction φ après division par x.

(b) Commençons donc par supposer $x \geq 0$. On sait alors que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0, x]$, et donc que $f(x) \leq f(t)$ pour tout t appartenant à $[0, x]$. En intégrant cette inégalité, on en déduit que $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt \geq xf(x)$, puis que $\varphi(x) \geq f(x)$. Pour l'autre inégalité, il suffit de constater que la fonction f est majorée par 1 (sur $\mathbb{R}$ tout entier), donc $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt \leq \int_0^x 1\ dt = x$, puis $\varphi(x) \leq 1$. Lorsque $x \leq 0$, il suffit d'utiliser la parité de nos deux fonctions pour déduire l'encadrement de celui qu'on vient de prouver lorsque $x \geq 0$.

(c) Notons pour simplifier F une primitive de f, alors $\varphi(x) = \dfrac{F(x)}{x}$, et $\varphi'(x) = \dfrac{xf(x) - F(x)}{x^2} = \dfrac{f(x) - \frac{F(x)}{x}}{x} = \dfrac{f(x) - \varphi(x)}{x}$. Pour la dérivabilité en 0, on peut utiliser la même magouille que pour f : on sait que $f(x) = 1 + x\varepsilon(x)$, donc $F(x) = x + x^2\varepsilon(x)$, et $\varphi(x) = 1 + x\varepsilon(x)$, ce qui prouve que $\varphi'(0) = 0$. La fonction φ est donc, comme la fonction f, décroissante sur $[0, +\infty[$ et croissante sur $]-\infty, 0]$.

(d) On peut majorer $\arctan(t)$ par $\dfrac{\pi}{2}$ sur $[1, x]$ pour en déduire que $\displaystyle\int_1^x f(t)\ dt \leq \int_1^x \frac{\pi}{2t}\ dt = \frac{\pi \ln(x)}{2}$. On en déduit que $0 \leq \displaystyle\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\ dt \leq \frac{\pi \ln(x)}{2x}$. Le membre de droite de l'encadrement a une limite nulle par croissance comparée, le théorème des gendarmes assure donc que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\ dt = 0$. Or, $\varphi(x) = \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\ dt + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\ dt$. Le premier morceau tend aussi vers 0 (l'intégrale est une constante dont la valeur importe peu), donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

(e) La courbe de φ va beaucoup ressembler à celle de la fonction f (elle est ci-dessus en bleu sur le même graphique que celle de f).

3. (a) On peut normaliser l'équation sur chacun des deux intervalles proposés : $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{\arctan(x)}{x^2}$. L'équation homogène associée a des solutions de la forme $y_h : x \mapsto \dfrac{K}{x}$, avec $K \in \mathbb{R}$ (constante différente sur chacun des deux intervalles, mais les formules sont les mêmes). On cherche une solution particulière en tulisant la variation de la constante : $y_p(x) = \dfrac{K(x)}{x}$ implique $y_p'(x) = \dfrac{K'(x)}{x} - \dfrac{K(x)}{x^2}$, et la fonction est solution de notre équation si $\dfrac{K'(x)}{x} = \dfrac{\arctan(x)}{x^2}$, donc si K est une primitive de la fonction f étudiée plus haut. On peut par exemple choisir la primitive de f s'annulant en 0, ce qui revient à dire que $y_p(x) = \varphi(x)$. Les solutions de notre équation sont alors de la forme $y : x \mapsto \dfrac{K}{x} + \varphi(x)$, avec $K \in \mathbb{R}$, sur chacun des deux intervalles de résolution.

(b) Puisque φ a une limite finie en 0, les solutions précédentes ne peuvent avoir elles-même une limite en 0 que si la constante K est nulle (à gauche comme à droite de 0), autrement dit si $y(x) = \varphi(x)$, qui est bien l'unique solution de l'équation sur $\mathbb{R}$ tout entier.