AP n°7 : révisions pour le DS commun

PTSI B Lycée Eiffel

2 février 2018

Exercice 1

On note f l'application définie sur $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ par $f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}+i}$.

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ sur $\mathbb{C}^*$, et donner une expression de sa réciproque.
2. (a) Déterminer $f(z)$ sous forme algébrique.
   (b) Déterminer l'ensemble des nombres z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$ (on donnera une interprétation géométrique).
   (c) Déterminer l'ensemble des nombres z pour lesquels $f(z) \in i\mathbb{R}$ (on donnera une interprétation géométrique).
   (d) Déterminer l'ensemble des nombres z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{U}$ (on donnera une interprétation géométrique).
3. (a) Déterminer $f(i\mathbb{R}\backslash\{i\})$.
   (b) Prouver que $f(\mathbb{R})$ est le cercle de centre $A\left(-\dfrac{i}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$, privé de l'origine.
   (c) Déterminer $f(\mathbb{U})$ (on doit trouver un ensemble simple).
4. (a) Résoudre l'équation $f(z) = -\bar{z}+\sqrt{3}$ (on mettra les solutions sous forme trigonométrique).
   (b) Déterminer les points fixes de f, c'est-à-dire les z vérifiant $f(z) = z$.

Exercice 2

On considère dans le plan les deux points A d'affixe $z_A = 1+i$ et B d'affixe $z_B = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$. On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1. On fixe de plus un réel $\alpha \in [0, 2\pi]$ et on note M le point d'affixe $z_M = e^{i\alpha}$.

1. Déterminer les racines quatrièmes de -4 (on les donnera sous forme algébrique).
2. Montrer que $e^{2i\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}\sin(\alpha)$.
3. Calculer le produit de distances $MA \times MB$.
4. Étudier les variations (sur une période) de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\left(-\dfrac{3}{2}+2\sin(\alpha)\right)^2}$.
5. Déduire des deux questions précédentes qu'il existe deux points de $\mathcal{C}$ pour lesquels $MA \times MB$ est minimale, et préciser la valeur correspondante.
6. Faire une figure pour illustrer.

Exercice 3

1. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 1$ et $\forall t \neq 0$, $f(t) = \dfrac{\arctan(t)}{t}$.
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.
   (b) Donner le développement limité à l'ordre 1 de $f(t)$ au voisinage de 0. En déduire que f est dérivable en 0, et donner $f'(0)$.
   (c) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(t)$, pour $t \in \mathbb{R}^*$.
   (d) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\displaystyle\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2}\, dw = -\frac{1}{2}t^2 f'(t)$. En déduire le sens de variation de f.
   (e) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
2. Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(0) = 1$ et $\forall x \neq 0$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.
   (a) Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq \varphi(x) \leq 1$ (on pourra commencer par supposer $x > 0$).
   (c) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x}(f(x) - \varphi(x))$. Montrer que φ est dérivable en 0, avec $\varphi'(0) = 0$. Donner les variations de φ.
   (d) Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\, dt = 0$. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.
   (e) Tracer la courbe représentative de φ dans le même repère que celle de f.
3. On considère l'équation différentielle : $x^2y' + xy = \arctan(x)$.
   (a) Résoudre cette équation différentielle sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
   (b) Montrer que φ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.