AP n°5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

1er décembre 2017

Pour s'échauffer, une ou deux équations différentielles

1. Puisqu'on nous le suggère gentiment, posons $y(t) = z(t)e^{2t}$ (ce qu'on peut toujours faire), ce qui donne $y'(t) = (2z(t) + z'(t))z^{2t}$, puis $y''(t) = (4z(t) + 4z'(t) + z''(t))e^{2t}$. En reportant dans l'équation de départ, on trouve alors l'équation équivalente $e^{2t}(4z(t) + 4z'(t) + z''(t) - 8z(t) - 4z'(t) + 4z(t)) = \frac{e^{2t}}{t^2}$, soit $z''(t) = \frac{1}{t^2}$, ce qui est effectivement nettement plus sympathique. Deux solutions à partir de ce point : soit on détermine directement toutes les fonctions z possibles (et donc toutes les y ensuite), ce qui donne $z'(t) = -\frac{1}{t} + K$, puis $z(t) = -\ln(t) + Kt + L$, et donc $y(t) = (-\ln(t) + Kt + L)e^{2t}$; soit on cherche juste une fonction z convenable, qui donne une seule solution particulière de notre équation, par exemple $z(t) = -\ln(t)$, et $y_p(t) = -\ln(t)e^{2t}$. Il faut alors résoudre l'équation homogène $y'' - 4y' + 4y = 0$. L'équation caractéristique qui lui est associée est $x^2 - 4x + 4 = 0$, soit $(x-2)^2 = 0$. Il y a une seule solution double égale à 2, dont on déduit que $y_h(t) = (At + B)e^{2t}$. On retrouve bien sûr les mêmes solutions générales que tout à l'heure.
2. Aucun problème pour résoudre l'équation homogène : l'équation caractéristique est $x^2 - 2x + 2$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$, et pour racines $x_1 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$ et $x_2 = 1 - i$. On en déduit les solutions de l'équation homogène : $y_h(t) = (A\cos(t) + B\sin(t))e^t$. Pour la solution particulière, il vaut mieux commencer par linéariser le membre de droite sous la forme $\cos^2(t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2}$. Par principe de superposition, on découpe la recherche de solution particulière en deux. L'équation $y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{2}$ a pour solution triviale $y_{p_1}(t) = \frac{1}{4}$.
Pour l'autre morceau, deux possibilités :
Soit on sait qu'on peut chercher $y_{p_2}(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t)$, on calcule alors $y'_{p_2}(t) = -2a\sin(2t) + 2b\cos(2t)$, puis $y''_{p_2}(t) = -4a\cos(2t) - 4b\sin(2t)$. L'équation $y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{2}\cos(2t)$ donne alors $(-2a - 4b)\cos(2t) + (4a - 2b)\sin(2t) = \frac{1}{2}\cos(2t)$. On en déduit les deux conditions $-2a - 4b = \frac{1}{2}$ et $4a - 2b = 0$, qui impliquent que $b = 2a$, puis $-10a = \frac{1}{2}$, soit $a = -\frac{1}{20}$ et $b = -\frac{1}{10}$. Autrement dit, $y_{p_2}(t) = -\frac{1}{20}\cos(2t) - \frac{1}{10}\sin(2t)$.
Soit on utilise la méthode du cours en passant aux complexes, et en cherchant une solution à l'équation $y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{2}e^{2it}$, en posant $y_{p_2}(t) = Ke^{2it}$. On a alors $y'_{p_2}(t) = 2iKe^{2it}$, puis $y''_{p_2}(t) = -4Ke^{2it}$, donc l'équation se résume à la condition $(-2-4i)Ke^{2it} = \frac{1}{2}e^{2it}$, soit $K = \frac{1}{-4-8i} = \frac{-4+8i}{16+64} = -\frac{1}{20} + \frac{1}{10}i$, puis $y_{p_2}(t) = \left(-\frac{1}{20} + \frac{1}{10}i\right)e^{2it}$. Il suffit de prendre la partie réelle de ce produit pour retrouver exactement la même solution particulière que par l'autre méthode.
La conclusion est la même dans les deux cas : en recollant tous les morceaux, $y(t) = (A\cos(t) + B\sin(t))e^t - \frac{1}{20}\cos(2t) - \frac{1}{10}\sin(2t) + \frac{1}{4}$.

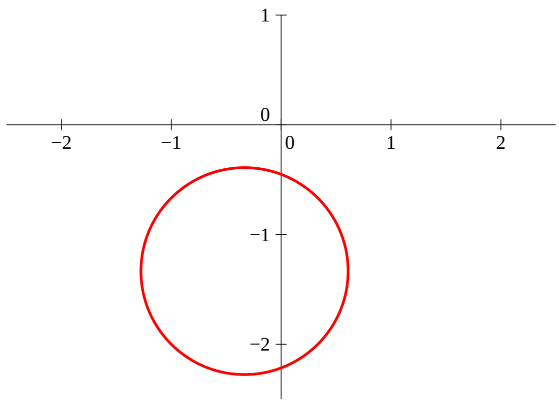
Pour continuer, encore des équations différentielles !

1. Normalisons l'équation : $z' - \frac{1}{x}z = x^2$. Puisqu'on est sur $]0, +\infty[$, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $z_h : x \mapsto Ke^{\ln(x)} = Kx$. On va utiliser la variation de la constante pour trouver une solution particulière de la forme $z_p(x) = xK(x)$ (non, on ne cherche pas une forme particulière du genre un polynôme de degré 2 puisque l'équation n'est pas à coefficients constants). On a alors $z_p'(x) = xK'(x) + K(x)$, puis $z_p'(x) - \frac{1}{x}z_p(x) = xK'(x) + K(x) - K(x) = xK'(x)$. Pour que z_p soit solution de l'équation, on doit donc avoir $xK'(x) = x^2$, soit $K'(x) = x$, et donc $K(x) = \frac{x^2}{2}$. Autrement dit, on peut choisir $z_p(x) = \frac{1}{2}x^3$. Les solutions de l'équation complète sont alors de la forme $z(x) = \frac{1}{2}x^3 + Kx$.
2. Avec les hypothèses faites, z est dérivable (puisque $xy' - y$ est dérivable, y étant supposée deux fois dérivable) et $z' = y' + xy'' - y' = xy''$. On en déduit que $xz' - z = x^2y'' - xy' + y = x^3$ par hypothèse. La fonction z est donc bien solution de l'équation résolue à la question précédente.
3. En reprenant les résultats des deux questions précédentes, on a nécessairement $xy' - y = \frac{1}{2}x^3 + Kx$. Nous voila devant une équation du premier ordre qu'on devrait être capables de résoudre. On commence par normaliser : $y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{2}x^2 + K$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme Lx (cette constante est évidemment indépendante de la constante K), on va chercher une solution particulière à l'aide de la variation de la constante : $y_p(x) = xL(x)$. le calcul est le même qu'à la première question, seul le second membre a changé, on trouve donc $xL'(x) = \frac{1}{2}x^2 + K$, soit $L'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{K}{x}$. On peut donc choisir $L(x) = \frac{1}{4}x^2 + K\ln(x)$, soit $y_p(x) = \frac{1}{4}x^3 + Kx\ln(x)$. Finalement, $y(x) = \frac{1}{4}x^3 + x(K\ln(x) + L)$. Si on a peur d'avoir ajouté des solutions à un moment ou à un autre (ici ça ne devrait pas être le cas), on vérifie : $y'(x) = \frac{3}{4}x^2 + K\ln(x) + L + K$, puis $y''(x) = \frac{3}{2}x + \frac{K}{x}$, donc $x^2y'' - xy' + y = \frac{3}{2}x^3 + Kx - \frac{3}{4}x^3 - Kx\ln(x) - Lx - Kx + \frac{1}{4}x^3 + Kx\ln(x) + Lx = x^3$. Tout marche bien !
4. On peut utiliser exactement la même méthode, les solutions particulières des équations homogènes sont toujours de la forme Kx (ou Lx) au signe de la constante près, et on trouve de la même façon $z(x) = \frac{1}{2}x^3 + Kx$, par contre à la fin on doit changer le signe à l'intérieur du ln pour obtenir $y(x) = \frac{1}{4}x^3 + x(K\ln(-x) + L)$. Allez, changeons le nom des constantes pour être rigoureux : $y(x) = \frac{1}{4}x^3 + x(A\ln(-x) + B)$. Par croissance comparée, les fonctions solutions auront toujours une limite nulle en 0, que ce soit en 0^+ ou en 0^-, ce qui permet au moins de les prolonger par continuité. Reprenons maintenant la formule pour y' sur $]0, +\infty[$: $y'(x) = \frac{3}{4}x^2 + K\ln(x) + L + K$. Cette fonction ne peut avoir de limite en 0 que si $K = 0$, et on a alors $\lim_{x \to 0^+} y'(x) = L$. C'est exactemet la même chose en 0^-, où la limite sera égale à B. Pour avoir des solutions qui se recollent, on doit donc imposer $K = A = 0$ et $L = B$, soit $y(x) = \frac{1}{4}x^3 + Lx$.

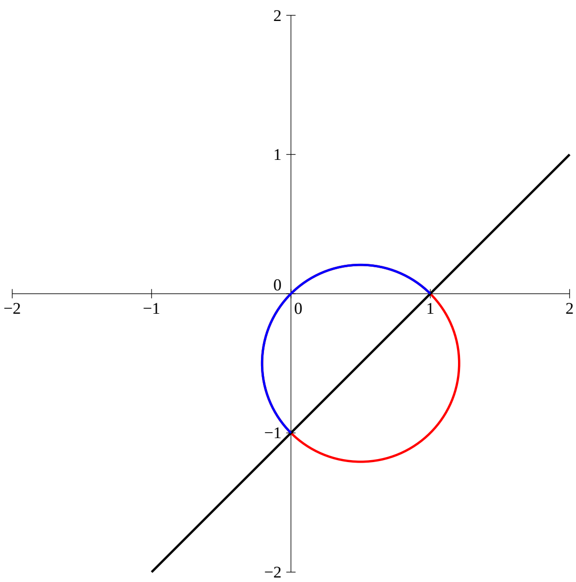
Complexes : fourre-tout

1. Soyons joyeusement bourrins en posant $z = a + ib$, et en élevant tout au carré (on peut, tout est positif) : $|z - 1|^2 = 4|z + i|^2$, soit $|(a - 1) + ib|^2 = 4|a + i(1 + b)|^2$, donc $(a - 1)^2 + b^2 = 4(a^2 + (1 + b)^2)$. On développe joyeusement (j'inverse les deux membres) : $4a^2 + 4b^2 + 8b +$

$4 = a^2 + b^2 - 2a + 1$, donc $3a^2 + 3b^2 + 2a + 8b + 3 = 0$. Quitte à tout diviser par trois, on reconnait une équation de cercle qu'on va factoriser : $a^2 + b^2 + \frac{2}{3}a + \frac{8}{3}b + 1 = 0$, soit $\left(a + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + \left(b + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} + 1 = 0$, ou encore $\left(a + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(b + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$. On reconnait le cercle de centre $A\left(-\frac{1}{3} - \frac{4}{3}i\right)$ et de rayon $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Un petit dessin pour illustrer :



2. On peut traduire simplement la condition par $\frac{z-1}{z+i} \in i\mathbb{R}^+$, soit $(z-1)(\overline{z+i}) \in i\mathbb{R}^+$ (attention, c'est modulo 2π, donc la partie imaginaire devra être positive). Bourrinons en posant $z = a+ib$, alors $(z-1)(\overline{z+i}) = (a-1+ib)(a-i(b+1)) = a^2-a+b^2+b+i(ab-ab-a+b+1)$. La condition est donc vérifiée si, d'une part, $a^2-a+b^2+b = 0$, soit $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$, on reconnait l'équation du cercle de centre $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$; et d'autre part si $b + 1 - a \geqslant 0$, soit $b \geqslant a - 1$, ce qui signifie que notre point doit être situé au-dessus de la droite d'équation $y = x - 1$ dans le plan complexe. Encore une illustration (seule la moitié de cercle surlignée en bleu est solution du problème) :



3. On peut déjà remplacer $|\bar{z}|$ par $|z|$ dans les égalités, c'est la même chose. On se retrouve donc en particulier avec la condition $|z|^2 = |z|$, ce qui implique manifestement $|z| = 1$ (ou $z = 0$, mais cette valeur n'est pas solution de toute façon). On peut donc poser $z = e^{i\theta}$, et

il reste simplement à vérifier la condition $|1-z|=1$. Or, $|1-e^{i\theta}| = |e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})| = |e^{i\frac{\theta}{2}} \times (-2i\sin\frac{\theta}{2})| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$. On se retrouve donc avec $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}$, soit $\frac{\theta}{2} = \pm\frac{\pi}{6}$, ou $\frac{\theta}{2} = \pm\frac{5\pi}{6}$. Modulo 2π, on a donc les valeurs possibles pour l'angle : $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{3}$. Les deux seules solutions du problème sont donc $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. (a) On commence par poser $Z = z^2$ pour se ramener à l'équation du second degré $Z^2 - (3+8i)Z - 16 + 12i = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = (3+8i)^2 + 4(16-12i) = 9 + 48i - 64 + 64 - 48i = 9$. C'est sympa, pas besoin de gros calculs pour obtenir $Z_1 = \frac{3+8i-3}{2} = 4i$ et $Z_2 = \frac{3+8i+3}{2} = 3+4i$. Il ne reste plus qu'à chercher les racines carrées de ces deux valeurs. Pour Z_1, on n'est pas obligés d'utiliser la méthode habituelle, on peut écrire $4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$, et en déduire que $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, et $z_2 = -z_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$. Par contre, pour Z_2, on va revenir à la méthode habituelle en posant $z = a + ib$ et en écrivant $z^2 = 3 + 4i$. En développant $(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$, on obtient les deux conditions $a^2 - b^2 = 3$ et $2ab = 4$, et on rajoute comme d'habitude la condition sur le module : $|z|^2 = a^2 + b^2 = |3+4i| = \sqrt{9+16} = 5$. En additionnant et en soustrayant les équations extrêmes, on trouve $2a^2 = 8$, soit $a = \pm 2$, et $2b^2 = 2$, soit $b = \pm 1$. Les réels a et b devant être de même signe à cause de la condition $2ab = 4$, on trouve donc les deux solutions $z_3 = 2 + i$ et $z_4 = -2 - i$. L'équation initiale a donc quatre solutions comme prévu.

   (b) Deux possibilités pour simplifier cette équation de degré 3 : soit on se rend compte que $z = -i$ est racine évidente, soit on ne s'en rend pas compte mais on sait factoriser : $z^3 - i = z^3 - (-i)^3 = (z+i)(z^2 - iz - 1)$, l'équation dévient alors $(z+i)(z^2 - iz - 7) = 0$. La deuxième parenthèse a pour discriminant $\Delta = -1 + 28 = 27$, et admet donc pour racines $z_1 = \frac{i + 3\sqrt{3}}{2}$, et $z_2 = \frac{i - 3\sqrt{3}}{2}$. Il y a donc trois solutions à l'équation : $-i$, $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

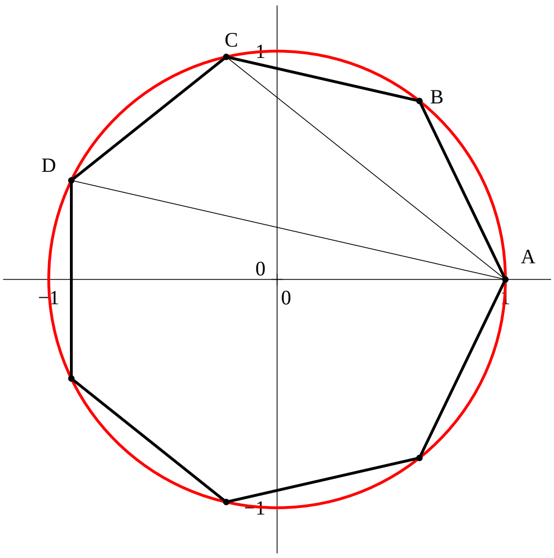
   (c) Cette équation revient à dire que $z^4 = 2\,\mathrm{Re}(z)$. En particulier, z^4 est un nombre réel, ce qui implique $\arg(z^4) \equiv 0[\pi]$, donc $4\arg(z) \equiv 0[\pi]$, et $z \equiv 0\left[\frac{\pi}{4}\right]$. Distinguons plusieurs cas, en commençant par $z = a \in \mathbb{R}$, l'équation devient alors $a^4 = 2a$, soit $a(a^3 - 2) = 0$, ce qui nous donne comme premières solutions $a = 0$ et $a = \sqrt[3]{2}$. Passons maintenant au cas où $z = bi \in i\mathbb{R}$, ce qui nous ramène à l'équation $b^4 = 0$, qui n'a donc pas d'autre solution que $z = 0$ qu'on avait déjà obtenue. Cas suivant, quand $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$, ce qui revient à dire que $z = c(1+i) = c + ci$, avec $c \in \mathbb{R}$. On a alors $z^4 = c^4(1+i)^4 = c^4(2i)^2 = -4c^4$. On est donc ramenés à l'équation $-4c^4 = 2c$, soit $2c(1 + 2c^3) = 0$. On retrouve encore une fois la solution nulle, ainsi que $c = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, soit encore $z = \frac{-1-i}{\sqrt[3]{2}}$. Dernier cas pour la route : si $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$, ce qui revient à dire que $z = d(1-i)$. On trouve alors $z^4 = d^4(1-i)^4 = d^4(-2i)^2 = -4d^4$. Même conclusion que tout à l'heure, on trouve $z = \frac{-1+i}{\sqrt[3]{2}}$. On a fini le tour, il y a donc quatre solutions au total.

5. Si on note z l'affixe d'un point du plan, et z' l'affixe de son image par la rotation r, alors $z' - i = e^{i\frac{\pi}{6}}(z - i)$, et $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(z-i) + i = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + \frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i$, ce qu'on notera de façon légèrement abusive $r(z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + \frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i$. De même, on aura $r'(z) = -i(z-1)+1 = -iz+i+1$. On peut alors calculer $r \circ r'(z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(-iz+i+1) +$

$\frac{1}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}i = \left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{3}}z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$. Sans surprise, notre isométrie est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$ (la somme des angles de r et de r'). Il ne reste plus qu'à déterminer son centre, qui est le point fixe de l'application : $r \circ r'(z) = z$ donne $z - \frac{1}{2}z + i\frac{\sqrt{3}}{2}z = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$, soit en multipliant partout par 2, $z = \frac{\sqrt{3}+3i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+3i)(1-i\sqrt{3})}{1+3} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

6. Supposons donc que le triangle ABC est équilatéral direct (s'il est indirect, la formule finale est légèrement modifiée, il y a une imprécision dans l'énoncé), et notons $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$. Profitons-en pour rappeler que ce nombre est une racine cubique de l'unité, et qu'on a donc $j^3 = 1$, ainsi que $1+j+j^2 = 0$. Le triangle est donc équilatéral direct si et seulement si $c-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$, ou encore $c - e^{i\frac{\pi}{3}}b + a(e^{i\frac{\pi}{3}}-1) = 0$. Or, $e^{i\frac{\pi}{3}} = -e^{-2i\frac{\pi}{3}} = -j^2$, et $e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i - 1 = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$. On trouve donc la première condition équivalente $c+j^2b+aj = 0$. Bien entendu, en multipliant par j ou j^2, on trouve les conditions symétriques $jc+b+j^2a = 0$ et $j^2c+jb+a = 0$ (en utilisant que $j^3 = 1$). Si le triangle est équilatéral indirect, on aurait de même les conditions $a+jc+j^2b = ja+j^2c+b = j^2a+c+jb = 0$.

7. Il suffit de prouver la formule pour un heptagone régulier particulier, et elle sera vraie pour tous les autres (au pire, toutes les distances seront multipliées par une même constante, ce qui ne change rien). Tant qu'à faire, prenons un heptagone régulier qu'on connait bien, celui formé par les racines septièmes de l'unité dans le plan complexe. Quitte à décider de renommer les points, on peut choisir $z_A = 1$, $z_B = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $z_C = e^{i\frac{4\pi}{7}}$ et $z_D = e^{i\frac{6\pi}{7}}$:



Il ne reste plus qu'à calculer les distances, par exemple $AB = |z_B - z_A| = |e^{i\frac{2\pi}{7}-1}|$. C'est une occasion rêvées de factoriser par l'angle moitié : $AB = |e^{i\frac{\pi}{7}}(e^{i\frac{\pi}{7}} - e^{-i\frac{\pi}{7}})| = |e^{i\frac{\pi}{7}}| \times \left|2i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ (qui est évidemment positif). Le même calcul donnera $AC = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ et $AD\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$. En mettant tout au même dénominateur, prouver que $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}$ revient alors à prouver que $AC \times AD - AB \times AD - AB \times AC = 0$, soit $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) = 0$. Utilisons joyeusement des transformations somme-produit (en multipliant tout par 2 et en transformant les angles négatifs en leur opposés par parité du cosinus) pour transformer le membre de gauche en $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) = -\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right) = 0$. Ah ben ça marche !