# AP : Séance n°5

PTSI B Lycée Eiffel

1er décembre 2017

## Pour s'échauffer, une ou deux équations différentielles

Résoudre les équations suivantes :

1. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2t}}{t^2}$ (on posera $y(t) = z(t)e^{2t}$).
2. $y'' - 2y' + 2y = \cos^2(t)$.

## Pour continuer, encore des équations différentielles !

On considère dans cet exercice l'équation différentielle $x^2y'' - xy' + y = x^3$.

1. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation du premier ordre $xz' - z = x^3$.
2. Soit $y$ une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ solution de l'équation initiale. On pose $z = xy' - y$, montrer que $z$ est solution de l'équation résolue à la question précédente.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation initiale sur $]0; +\infty[$.
4. Que se passe-t-il si on essaye de résoudre sur $]-\infty, 0[$ ? Existe-t-il des solutions à l'équation définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

## Complexes : fourre-tout

Toutes les questions forment des petits exercices indépendants.

1. Déterminer l'ensemble des points du plan complexe pour lesquels $\left|\dfrac{z-1}{z+i}\right| = 2$.
2. Idem pour la condition $\arg\left(\dfrac{z-1}{z+i}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.
3. Idem pour la condition $|z^2| = |1 - z| = |\bar{z}|$.
4. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $z^4 - (3 + 8i)z^2 - 16 + 12i = 0$.
   (b) $z^3 - i = 6(z + i)$.
   (c) $z^4 = z + \bar{z}$.
5. $A$ et $B$ sont les points d'affixes respectives $i$ et 1. On note $r$ la rotation de centre $A$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$, $r'$ la rotation de centre $B$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. Déterminer une équation de $r \circ r'$, et reconnaitre l'isométrie correspondante.
6. Soient $A$, $B$ et $C$ trois points d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$, montrer que le triangle $ABC$ est équilatéral si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$ (où $j = e^{i\frac{\pi}{3}}$).
7. Soit $ABCDEFG$ un heptagone régulier, montrer que $\dfrac{1}{AB} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}$.