AP n°4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

10 novembre 2017

Exercice 1

1. Normalement, ça doit être immédiat puisque les deux termes de la somme sont des fonctions puissances : $F(x) = \frac{x^{-3}}{-3} + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3x^3} - \frac{2}{\sqrt{x}}$ (on peut bien sûr ajouter une constante).
2. C'est une fraction rationnelle, on commence donc par factoriser le dénominateur sous la forme $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$ (détail du calcul laissé en exercice au lecteur), puis on effectue une décomposition en éléments simples : $\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3}$. Utilisons les astuces du cours pour calculer les numérateurs : en multipliant par $x-2$, on trouve $\frac{1}{x-3} = a + \frac{b(x-2)}{x-3}$, donc en posant $x = 2$, $a = -1$. De même en multipliant par $x-3$ puis en posant $x = 3$, on obtient $b = 1$. Il ne reste plus qu'à calculer l'intégrale en faisant attention aux signes dans les ln : $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6}\ dx = \int_0^1 \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\ dx = [\ln(3-x) - \ln(2-x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(3) + \ln(2) = 2\ln(2) - \ln(3) = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$ (l'intégrale est légèrement positive, ce qui est normal puisque notre trinôme est positif à l'extérieur de ses racines).
3. Puisqu'on nous le demande si gentiment, posons donc $u = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$ (on peut vérifier que la fonction correspondante est bien bijective si on est motivé). Cela revient à écrire $u^2 = 1 + \frac{1}{x}$, soit $x = \frac{1}{u^2-1}$. Les bornes de l'intégrale deviennent $\sqrt{\frac{1+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}} = \sqrt{4} = 2$, et $\sqrt{\frac{1+\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}}} = \sqrt{9} = 3$ (elles seront donc dans le bon sens après changement de variable alors qu'elles ne l'étaient pas initialement, c'est normal car le changement de variable est une bijection décroissante). De plus, l'élément différentiel est modifié : en posant $g(u) = \frac{1}{u^2-1}$, on a $g'(u) = -\frac{2u}{(u^2-1)^2}$, donc $dx = -\frac{2u}{(u^2-1)^2}\ du$. Notre intégrale initiale est donc égale à $\int_2^3 (1+u)(u^2-1) \times \frac{-2u}{(u^2-1)^2}\ du = \int_2^3 \frac{-2u(1+u)}{(u-1)(u+1)}\ du = \int_2^3 -\frac{2u}{u-1}\ du = \int_2^3 \frac{-2u+2-2}{u-1}\ du = \int_2^3 -2 - \frac{2}{u-1}\ du = [-2u - 2\ln(u-1)]_2^3 = -6 - 2\ln(2) + 4 = -2(1+\ln(2))$ (l'intégrale est logiquement négative puisque la fonction à intégrer était initialement positive, mais les bornes dans le mauvais sens).
4. Pour tenter de déterminer une relation de récurrence, le plus classique est de tenter une IPP. On va ici poser $v(x) = x^n$, donc $v'(x) = nx^{n-1}$, et $u'(x) = \sqrt{1-x}$, qui admet pour primitive $u(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$. On peut donc écrire $I_n = \left[-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} \times x^n\right]_0^1 + \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}\ dx = 0 + \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x} - x^n\sqrt{1-x}\ dx = \frac{2n}{3}(I_{n-1} - I_n)$. On

en déduit que $I_n\left(1+\dfrac{2n}{3}\right)=\dfrac{2n}{3}I_{n-1}$, soit $(2n+3)I_n=2nI_{n-1}$, et donc $I_n=\dfrac{2n}{2n+3}I_{n-1}$. Si on préfère, on écrira la relation sous la forme équivalent $I_{n+1}=\dfrac{2n+2}{2n+5}I_n$. Pour initialiser les calculs, il faut tout de mettre connaitre la valeur de $I_0=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x}\,dx=-\frac{2}{3}[(1-x)^{\frac{3}{2}}]_0^1=\frac{2}{3}$. On en déduit grâce à la relation de récurrence $I_1=\dfrac{2}{5}I_0=\dfrac{4}{15}$, puis $I_2=\dfrac{4}{7}I_1=\dfrac{16}{105}$, $I_3=\dfrac{2}{3}I_2=\dfrac{32}{315}$, et enfin $I_4=\dfrac{8}{11}I_3=\dfrac{256}{3\ 465}$.

5. La fonction à l'intérieur de l'intégrale est définie partout sauf en 0, et 0 n'est jamais compris entre x et $\dfrac{1}{x}$ quand $x\neq 0$ donc $\mathcal{D}_F=\mathbb{R}^*$. Pour calculer la dérivée de F, on pose $g(t)=\dfrac{\arctan(t)}{t}$, et on note G une primitive quelconque de g (il en existe nécessairement) sur chaun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$. On peut alors écrire que $F(x)=[G(t)]_x^{\frac{1}{x}}=G\left(\dfrac{1}{x}\right)-G(x)$. On en déduit, en dérivant la composée, que $F'(x)=-\dfrac{1}{x^2}g\left(\dfrac{1}{x}\right)-g(x)=-\dfrac{1}{x^2}\times x\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{\arctan(x)}{x}=-\dfrac{\arctan(\frac{1}{x})+\arctan(x)}{x}$. Posons maintenant $h(x)=\arctan(x)+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$. La fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée $h'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2}\times\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=0$. La fonction h est donc constante sur cet intervalle, de valeur $h(1)=2\arctan(1)=\dfrac{\pi}{2}$. On en déduit que, sur $\mathbb{R}^{+*}$, $F'(x)=-\dfrac{\pi}{2x}$, donc $F(x)=-\dfrac{\pi}{2}\ln(x)+K$, où K est une constante qui peut être déterminée simplement par le fait que $F(1)=0$ (puisqu'alors les deux bornes sont les mêmes dans la définition de F). On a donc $K=0$ et $F(x)=-\dfrac{\pi}{2}\ln(x)$. De même, sur $\mathbb{R}^{-*}$, on trouve $h(x)=-\dfrac{\pi}{2}$, puis $F(x)=\dfrac{\pi}{2}\ln(-x)$.

Exercice 2

1. Commençons par normaliser l'équation, ce qu'on peut faire sans problème sur $\mathbb{R}$ tout entier : $y'+\dfrac{x}{1+x^2}y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. L'équation homogène associée admet pour solutions les fonctions de la forme $y_h: x\mapsto Ke^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}=\dfrac{K}{\sqrt{1+x^2}}$, pour $K\in\mathbb{R}$. Utilisons la méthode de variation de la constante pour déterminer une solution particulière de la forme $y_p(x)=\dfrac{K(x)}{\sqrt{1+x^2}}$. On calcule $y_p'(x)=\dfrac{K'(x)\sqrt{1+x^2}-\frac{2xK(x)}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$. On en déduit que y_p est solution de l'équation complète si $\dfrac{K'(x)}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{xK(x)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{xK(x)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, soit $K'(x)=1$. On peut donc prendre $K(x)=x$, soit $y_p(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Les solutions de l'équation complète sont alors toutes les fonctions de la forme $y: x\mapsto\dfrac{x+K}{\sqrt{1+x^2}}$, avec $K\in\mathbb{R}$.

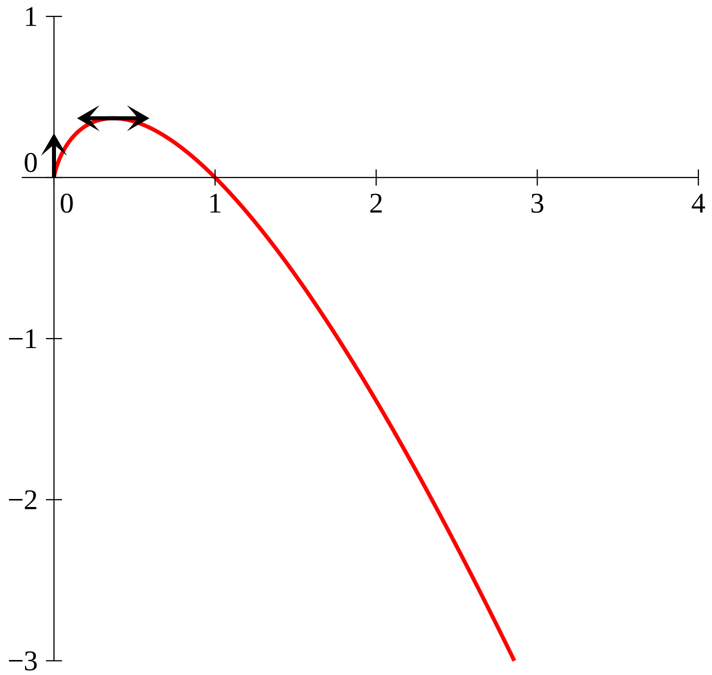
2. Même méthode que ci-dessus, on peut normaliser (sur l'intervalle préciser) : $y'-\dfrac{x}{1-x^2}y=\dfrac{1}{1-x^2}$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_h(x)=Ke^{-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)}=\dfrac{K}{\sqrt{1-x^2}}$, pour $K\in\mathbb{R}$ (il y a bien un $-$ dans l'exponentielle puisque la dérivée de $\ln(1-x^2)$

est égale à $-\dfrac{2x}{1-x^2}$). On chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \dfrac{K(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, ce qui donne $y_p'(x) = \dfrac{K'(x)\sqrt{1-x^2} + \frac{xK(x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$. Cette fonction est solution de l'équation complète si $\dfrac{K'(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{xK(x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{xK(x)}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{1-x^2}$, soit $K'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On peut par exemple prendre $K(x) = \arcsin(x)$, soit $y_p(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Les solutions de l'équation complète sont alors toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto \dfrac{\arcsin(x) + K}{\sqrt{1-x^2}}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

3. On peut normaliser l'équation sous la forme $y' + \dfrac{1}{x\ln(x)} = \dfrac{1}{\ln(x)}$, et chercher à la résoudre sur les intervalles $I_1 =]0,1[$ et $I_2 =]1,+\infty[$. Sur I_2, l'équation homogène admet des solutions de la forme $y_h(x) = Ke^{-\ln(\ln(x))} = \dfrac{K}{\ln(x)}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Sur l'intervalle I_1, il faut remplacer le $\ln(\ln(x))$ dans l'exponentielle par $\ln(-\ln(x))$, mais ça ne change pas la forme des solutions particulières : $y_h(x) = \dfrac{L}{\ln(x)}$, avec $L \in \mathbb{R}$ (quitte à changer le signe de la constante). On chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \dfrac{K(x)}{\ln(x)}$, on calcule $y_p'(x) = \dfrac{K'(x)\ln(x) - \frac{K(x)}{x}}{\ln^2(x)}$. La fonction est solution de l'équation complète si $\dfrac{K'(x)}{\ln(x)} - \dfrac{K(x)}{x\ln^2(x)} + \dfrac{K(x)}{x\ln^2(x)} = \dfrac{1}{\ln(x)}$, soit $K'(x) = 1$. On peut donc prendre $K(x) = x$, soit $y_p(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$. Les solutions de l'équation complète (sur l'intervalle I_2) donc de la forme $y_2(x) = \dfrac{x+K}{\ln(x)}$, avec $K \in \mathbb{R}$. De même sur I_1, les solutions sont de la forme $y_1(x) = \dfrac{x+L}{\ln(x)}$. Pour recoller les morceaux, comment par calculer les limites en 1 : la seule possibilité pour avoir une limite finie pour y_2 quand x tend vers 1 est d'imposer comme valeur de la constante $K = -1$ (pour que le numérateur tende vers 0 et puisse éventuellement compenser la limite nulle du dénominateur). De fait, $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{\ln(x)} = 1$ (si vous n'êtes pas convaincus, posez $X = x-1$ pour vous ramener à la limite classique $\lim\limits_{X\to 0^+} \dfrac{X}{\ln(1+X)}$, dont l'inverse a été vue en cours). Il se passe exactement la même chose de l'autre côté, où on doit poser $L = 1$ pour avoir une limite égale à 1 quand x tend vers 1. La seule solution potentielle sur $]0,+\infty[$ est donc définie par $y(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x)}$ quand $x \neq 1$, prolongée par continuité en posant $y(1) = 1$. Reste à savoir si cette fonction est vraiment dérivable en 1. Quand $x \neq 1$, on calcule $y'(x) = \dfrac{\ln(x) - \frac{1}{x}(x-1)}{\ln^2(x)} = \dfrac{x\ln(x) + 1 - x}{x\ln^2(x)}$. Et là on est très embêtés puisqu'on ne sait pas du tout calculer la limite de cette expression quand x tend vers 1. Nous y arriverons plus tard dans l'année grâce aux développements limités. Pour les curieux, en posant $X = x-1$, on se ramène au calcul de $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{(1+X)\ln(1+X) - X}{(1+X)\ln^2(1+X)}$. On apprendra que $\ln(1+X) \underset{X\to 0}{=} X - \dfrac{X^2}{2} + o(X^2)$, ce qui permet d'écrire $\dfrac{(1+X)\ln(1+X) - X}{(1+X)\ln^2(1+X)} = \dfrac{(1+X)(X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)) - X}{(1+X)(X^2 + o(X^2))} = \dfrac{\frac{X^2}{2} + o(X^2)}{X^2 + o(X^2)}$, ce qui donne une limite égale à $\dfrac{1}{2}$ (à gauche comme à droite). Notre solution est donc bien valable et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ tout entier.

Exercice 3

1. La fonction est naturellement définie, dérivable et tout ce qu'on veut sur $]0,+\infty[$. Commençons par étudier ses variations : $f'(x) = -\ln(x) - 1$, qui s'annule en $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. La fonction est croissante sur $\left]0,\dfrac{1}{e}\right[$ et décroissante ensuite, et admet pour maximum $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e}$. Les calculs de limites ne sont pas plus compliqués : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ est immédiat, et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ par croissance comparée. On peut donc prolonger la fonction par continuité en posant $f(0) = 0$. our savoir si ce prolongement est dérivable, on peut calculer le taux d'accroissement en 0 : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{-x\ln(x)}{x} = -\ln(x)$, qui a pour limite $+\infty$ quand x tend vers 0. Le prolongement n'est donc pas dérivable en 0, on peut par contre affirmer la présence d'une tangente verticale en 0. Une allure de courbe :

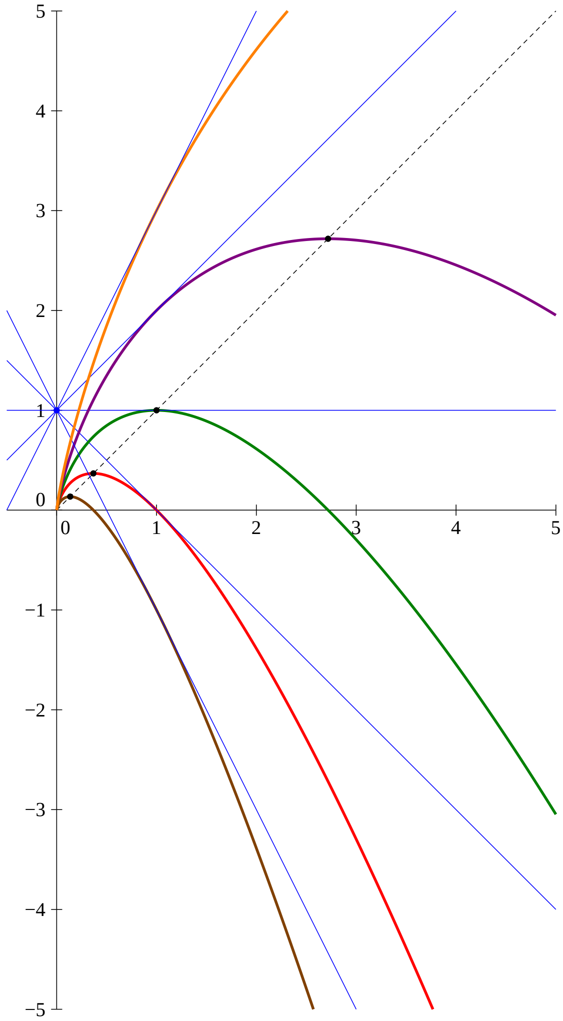


2. On commence bien sûr par normaliser l'équation : $y' - \dfrac{1}{x}y = -1$. L'équation sans second membre a des solutions de la forme $y_h(x) = Ke^{\ln(x)} = Kx$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $y_h(x) = Le^{\ln(-x)} = -Lx$ sur $\mathbb{R}^{-*}$. On peut deviner une solution particulière évidente ici, mais pour s'entraîner, appliquons la variation de la constante (sur les deux intervalles simultanément, inutile de faire deux calculs) en cherchant $y_p(x) = xK(x)$. On a alors $y_p'(x) = K(x) + xK'(x)$, donc $y_p(x) - \dfrac{1}{x}y_p(x) = K(x) + xK'(x) - K(x) = xK'(x)$. La fonction y_p est donc solution de notre équation différentielle si $xK(x) = -1$, soit $K(x) = -\ln(|x|)$, et donc $y_P(x) = -x\ln(|x|)$. Finalement, les solutions sont de la forme $y(x) = (K - \ln(x))x$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et $y(x) = -(L + \ln(-x))x$ sur $\mathbb{R}^{-*}$. En laissant sous forme développée, et en appliquant des résultat de croissance comparée classique, on voit que toutes ces solutions ont une limite nulle en 0 (que ce soit en 0^+ ou en 0^- selon l'intervalle sur lequel elles sont définies). Reste le problème de la dérivée : si on prend la formule obtenue sur $\mathbb{R}^{+*}$, $y'(x) = K - \ln(x) - 1$, qui a une limite infinie en 0. Même pas la peine de chercher à étudier de l'autre côté, on ne pourra de toute façon pas obtenir de solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ à l'équation.

3. On sait que $f(x) = (K - \ln(x))x$. Pour avoir $f(x_0) = y_0$, on impose donc $(K - \ln(x_0))x_0 = y_0$,

ou encore $K = \dfrac{y_0}{x_0} + \ln(x_0)$. On peut alors écrire que $f(x) = \left(\dfrac{y_0}{x_0} - \ln\left(\dfrac{x}{x_0}\right)\right)x$. On a déjà calculé la dérivée des solutions plus haut, on sait que $f'(x_0) = K - \ln(x_0) - 1 = \dfrac{y_0}{x_0} - 1$. La tangente correspondante a donc pour équation $y = \left(\dfrac{y_0}{x_0} - 1\right)(x - x_0) + y_0 = \left(\dfrac{y_0}{x_0} - 1\right)x + x_0$. Si on veut que les droites soient concourantes, il vaut trouver une valeur de x pour laquelle y ne dépend pas de y_0. Comme $y = y_0 \times \dfrac{x}{x_0} + x_0 - x$, il suffit de prendre $x = 0$, ce qui donne toujours $y = x_0$. Je vous sens venir, vous allez protester que 0 n'appartient pas à $\mathbb{R}^{+*}$ et que ça pose problème. En fait, pas du tout ! Les tangentes à la courbe sont des droites, définies pour tout réel, et peu importe qu'elles soient concourantes à une abscisse nulle.

4. Répétons une nouvelle fois que, pour les solutions de (E), $y'(x) = K - \ln(x) - 1$. Cette dérivée s'annule lorsque $x = e^{K-1}$, et elle est négative avant cette valeur et positive après, ce qui correspond bien à un maximum. La valeur du maximum correspondant est $y(e^{K-1}) = (K - \ln(e^{K-1}))e^{K-1} = e^{K-1}$. Autrement dit, le maximum est toujours situé sur la droite d'équation $y = x$. Plus précisément, le lieu des maxima est la demi-droite ouverte issue de l'origine incluse dans cette droite, puisqu'on e^{K-1} parcourt exactement $\mathbb{R}^{+*}$ lorsque K varie dans $\mathbb{R}$.
5. Résumons les données des questions précédentes dans le cas où $x_0 = 1$: on aura $K = y_0$ et la tangente au point d'abscisse 1 aura pour équation $y = (K - 1)x + 1$. ces tangentes se coupent au point de coordonnées $(0, 1)$. Pour $K = 0$, la solution est simplement la fonction f étudiée à la question 1. En général, notre solution aura un maximum en e^{K-1}, de valeur identique. Sur la figure, est tracée en pointillés la demi-droite qui est le lieu des maxima, en bleu les tangentes en 1, et les courbes en diverses couleurs pour des valeurs différentes de K : rouge pour $K = 0$, vert pour $K = 1$, violet pour $K = 2$, et marron pour $K = -1$. Les maxima ne sont exceptionnellement pas indiqués par des doubles flèches horizontales pour ne pas surcharger la figure mais seulement par des points noirs.



5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
0
1
2
3
4
5