AP : Séance n°4

PTSI B Lycée Eiffel

10 novembre 2017

Exercice 1 : fourre-tout sur les intégrales

1. Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\, dx$.
3. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{8}} \frac{1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}}{x}\, dx$ en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$.
4. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$. Exprimer I_n en fonction de I_{n-1}. En déduire la valeur de I_4.
5. On pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\arctan(t)}{t}\, dt$. Déterminer le domaine de définition de F, puis calculer sa dérivée F' et en déduire une expression simple de F.

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes :

1. $(1 + x^2)y' + xy = \sqrt{1 + x^2}$.
2. $(1 - x^2)y' - xy = 1$ (sur $]-1, 1[$).
3. $\ln(x)y' + \dfrac{1}{x}y = 1$ (sur chacun des intervalles où on peut résoudre, et on essaiera de recoller les solutions ensuite).

Exercice 3

On considère dans tout cet exercice l'équation différentielle $(E) : xy' - y + x = 0$.

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto -x\ln(x)$ sur $]0, +\infty[$, en essayant de la prolonger par continuité en 0 et de déterminer si la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0. On tracera naturellement une allure soignée de la courbe pour conclure cette étude.
2. Résoudre l'équation (E) successivement sur les deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Existe-t-il des solutions à l'équation définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?
3. On se concentre désormais aux solutions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $x_0 > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, déterminer l'expression de l'unique solution de (E) vérifiant $f(x_0) = y_0$. Donner une équation de sa tangente au point de la courbe d'abscisse x_0, et prouver que toutes les tangentes obtenues sont concourantes lorsque y_0 parcourt $\mathbb{R}$ (x_0 restant fixé).
4. Vérifier que les courbes des solutions de (E) admettent toutes un maximum sur $\mathbb{R}^{+*}$, et déterminer le lieu des points correspondants.
5. Tracer dans un même repère l'allure de quelques solutions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$, en faisant apparaitre distinctement leur tangentes au point d'abscisse $x_0 = 1$, ainsi que le lieu des maxima déterminé à la question précédente.