AP n°3 : corrrigé

PTSI B Lycée Eiffel

13 octobre 2017

Petits exercices et calculs variés

1. Notons S la somme à calculer, on peut écrire $S = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} 2i - 1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \times (j(j+1) - j) = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Une méthode possible est de calculer la tangente du membre de droite à l'aide de la formule d'addition des tangentes : $\tan(\arctan(x+1) - \arctan(x)) = \frac{x+1-x}{1+x(x+1)} = \frac{1}{x^2+x+1}$ (rappelons aux plus étourdis d'entre vous qu'on peut toujours simplifier $\tan(\arctan(x))$). Les deux membres ont donc la même tangente. De plus, on sait que x^2+x+1 est toujours positif (il a un discriminant négatif, ce qui prouve d'ailleurs l'existence du membre de gauche sur $\mathbb{R}$ tout entier), donc l'angle de gauche appartient à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. À droite, $\arctan(x+1)$ et $\arctan(x)$ sont évidemment compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, et $\arctan(x+1) > \arctan(x)$ puisque la fonction arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que l'angle de droite est compris entre 0 (strictement) et π. Deux angles compris entre 0 et π ayant la même tangente sont égaux, on peut donc conclure que $\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan(x+1) - \arctan(x)$.

   Autre méthode : on pose brutalement $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) - \arctan(x+1) + \arctan(x)$.
   Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}}{1+\frac{1}{(x^2+x+1)^2}} - \frac{1}{1+(x+1)^2} + \frac{1}{1+x^2}$
   $= \frac{-2x-1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} - \frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{1}{1+x^2}$
   $= \frac{-2x-1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} + \frac{x^2+2x+2-x^2-1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} = 0$.
   Miracle, la fonction f est constante. Comme $f(0) = \arctan(1) - \arctan(1) + \arctan(0) = 1$, on en déduit que f est la fonction nulle, ce qui prouve l'égalité souhaitée.

   Le calcul de somme est maintenant facile puisqu'il y a un télescopage évident :
   $S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \arctan(k+1) - \arctan(k) = \arctan(n+1) - \arctan(0)$
   $= \arctan(n+1)$. Quand n tend vers $+\infty$, on a donc $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$ (limite de la fonction arctan en $+\infty$).

3. Calculons donc : $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i^2 + 2ij + j^2 = \sum_{i=1}^{n} ni^2 + n(n+1)i + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{2} + \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)(2(2n+1)+3(n+1))}{6} =$

$\dfrac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$.

4. Puisqu'on nous y invite si cordialement, prouvons donc par récurrence la propriété P_n : $u_n = 3 - 2^n$. Au rang 0, $3 - 2^0 = 3 - 1 = 2 = u_0$ donc la propriété est effectivement vraie. Supposons-la vérifie à un certain rang n, on peut alors écrire $u_{n+1}^{=} 2u_n - 3 = 2 \times (3 - 2^n) - 3 = 6 - 2^{n+1} - 3 = 3 - 2^{n+1}$, ce qui prouve exactement P_{n+1}. Par principe de récurrence, la propriété P_n est donc vraie pour tout entier naturel n.
5. Procédons par étapes : $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)' = \dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2}$, puis $\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \times \dfrac{2}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x} \times (1-x)\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$. Enfin, $f'(x) = \dfrac{2}{1+\frac{1+x}{1-x}} \times \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2(1-x)}{2} \times \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Autrement dit, la fonction f a la même dérivée que la fonction arcsin (qui est bien définie sur tout l'intervalle de définition de f). On en déduit que $f(x) = \arcsin(x) + k$, où k est une constante réelle qu'on détermine aisément en calculant une valeur particulière de la fonction : $f(0) = 2\arctan(1) = \dfrac{\pi}{2}$. Comme $\arcsin(0) = 0$, on peut conclure que $f(x) = \arcsin(x) + \dfrac{\pi}{2}$.

Du classique sur les sommes

1. Pour éviter l'identification un peu lourde, on peut utiliser les magouilles suivantes :
   - On multiplie tout par k pour obtenir $\dfrac{1}{(k+2)(k+5)} = a + \dfrac{bk}{k+2} + \dfrac{ck}{k+5}$, puis on évalue cette égalité pour $k = 0$ et on trouve immédiatement $a = \dfrac{1}{10}$.
   - De même, en multipliant tout par $k+2$ puis en posant $k = -2$, on trouve $b = \dfrac{1}{(-2) \times (-2+5)} = -\dfrac{1}{6}$.
   - Enfin, on multiplie par $k+5$ et on pose $k = -5$ pour trouver $c = \dfrac{1}{(-5) \times (-5+2)} = \dfrac{1}{15}$.

   Conclusion : $\dfrac{1}{k(k+2)(k+5)} = \dfrac{1}{10k} - \dfrac{1}{6(k+2)} + \dfrac{1}{15(k+5)}$ (si la méthode ci-dessus ne vous plait pas, une bête mise au même dénominateur suivie d'une identification fonctionne aussi fort bien).
2. Allons-y pour un très beau télescopage en posant S_n la somme à calculer, et en constatant bien entendu que $\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{15} = 0$:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}+\frac{1}{15}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+5}\\
&= \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{6}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}+\frac{1}{15}\sum_{k=6}^{n+5}\frac{1}{k}\\
&= \frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{40}+\frac{1}{50}+\frac{1}{10}\sum_{k=6}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{18}-\frac{1}{24}-\frac{1}{30}-\frac{1}{6}\sum_{k=6}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{6(n+1)}-\frac{1}{6(n+2)}\\
&\quad +\frac{1}{15}\sum_{k=6}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{15(n+1)}+\frac{1}{15(n+2)}+\frac{1}{15(n+3)}+\frac{1}{15(n+4)}+\frac{1}{15(n+5)}\\
&= \frac{60+30+20+15+12}{600}-\frac{20+15+12}{360}-\frac{1}{10(n+1)}-\frac{1}{10(n+2)}\\
&\quad +\frac{1}{15(n+3)}+\frac{1}{15(n+4)}+\frac{1}{15(n+5)}\\
&= \frac{22}{225}-\frac{1}{10(n+1)}-\frac{1}{10(n+2)}+\frac{1}{15(n+3)}+\frac{1}{15(n+4)}+\frac{1}{15(n+5)}
\end{aligned}$$

Je vous passe les détails de la simplification de la constante à gauche, ce n'est pas très intéressant. Pour les termes restants qui dépendent de n, ça n'a franchement aucun intérêt de les mettre au même dénominateur, mais si on y tient vraiment, on devrait obtenir : $S_n = \frac{22}{225} - \frac{15n^3+140n^2+405n+352}{30(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$.

3. Il vaut nettement mieux utiliser la première forme obtenue et donc démontrer par récurrence la propriété P_n : $S_n = \frac{22}{225}-\frac{1}{10(n+1)}-\frac{1}{10(n+2)}+\frac{1}{15(n+3)}+\frac{1}{15(n+4)}+\frac{1}{15(n+5)}$. Commençons tout de suite par signaler que, pour passer de S_n à S_{n+1}, on ajoutera un terme égal à $\frac{1}{(n+1)(n+3)(n+6)} = \frac{1}{10(n+1)} - \frac{1}{6(n+3)} + \frac{1}{15(n+6)}$ en reprenant les calculs de la première question de l'exercice.

   Vérifions que P_1 est vraie : lorsque $n=1$, $S_1 = \frac{1}{1\times 3\times 6} = \frac{1}{18}$, et $\frac{22}{225}-\frac{1}{20}-\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\frac{1}{75}+\frac{1}{90} = \frac{22}{225}-\frac{5}{60}+\frac{15+12+10}{900} = \frac{88}{900}-\frac{1}{12}+\frac{37}{900} = \frac{125}{900}-\frac{1}{12} = \frac{5}{36}-\frac{3}{36} = \frac{1}{18}$. Oh, c'est fou, ça marche !

   Passons à l'hérédité, qui est en fait facile : $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+3)(n+6)} = \frac{22}{225} - \frac{1}{10(n+1)} - \frac{1}{10(n+2)} + \frac{1}{15(n+3)} + \frac{1}{15(n+4)} + \frac{1}{15(n+5)} + \frac{1}{10(n+1)} - \frac{1}{6(n+3)} + \frac{1}{15(n+6)} = \frac{22}{225} - \frac{1}{10(n+2)} - \frac{1}{10(n+3)} + \frac{1}{15(n+4)} + \frac{1}{15(n+5)} + \frac{1}{15(n+6)}$, ce qui prouve exactement la propriété P_{n+1} (et bravo à ceux qui auront fait le calcul après avoir tout mis au même dénominateur). Par principe de récurrence, toutes les propriétés P_n sont donc vraies pour $n \geqslant 1$.

Un peu de trigo ça ne peut pas faire de mal !

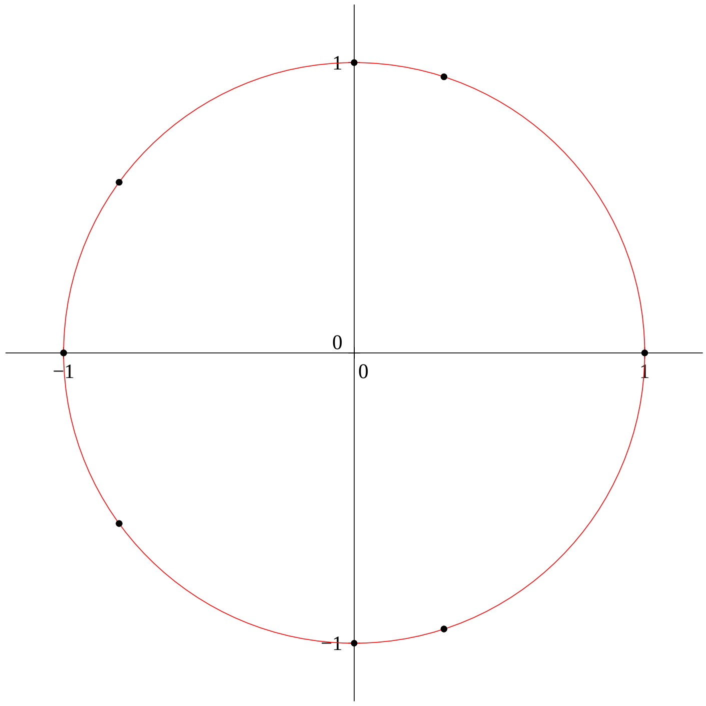
1. Première méthode : utilisation brutale des formules de duplication.

   On écrit donc $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)+\sin(4x) = \sin(x)+2\sin(x)\cos(x)+3\sin(x)-4\sin^3(x)+2\sin(2x)\cos(2x) = \sin(x)+2\sin(x)\cos(x)+3\sin(x)-4\sin^3(x)+4\sin(x)\cos(x)(2\cos^2(x)-1) = \sin(x)(1+2\cos(x)+3-4\sin^2(x)+8\cos^3(x)-4\cos(x)) = \sin(x)(1+2\cos(x)+3-4+4\cos^2(x)+$

$8\cos^3(x) - 4\cos(x)) = \sin(x)(-2\cos(x) + 4\cos^2(x) + 8\cos^3(x)) = 2\sin(x)\cos(x)(4\cos^2(x) + 2\cos(x) - 1)$. Notre équation est donc vérifiée dans un des trois cas suivants : soit $\sin(x) = 0$, c'est-à-dire $x \equiv 0[\pi]$; $\cos(x) = 0$, soit $x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ (on peut regrouper ces deux premiers cas sous la forme $x \equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$), soit enfin $4\cos^2(x) + 2\cos(x) - 1 = 0$. Pour ce dernier cas, on va poser $X = \cos(x)$, et résoudre l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4+16 = 20$, et admet deux racines réelles $X_1 = \frac{-2-\sqrt{20}}{8} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$, et $X_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Ces deux solutions ayant le bon gout d'être comprises entre -1 et 1, elles donnent quatre nouvelles valeurs possibles pour x (modulo 2π, sous la forme $x = \pm\arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$ et $x = \pm\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)$. Si on est très savant, on peut reconnaitre là les angles moyennement remarquables $\pm\frac{2\pi}{5}$ et $\pm\frac{4\pi}{5}$.

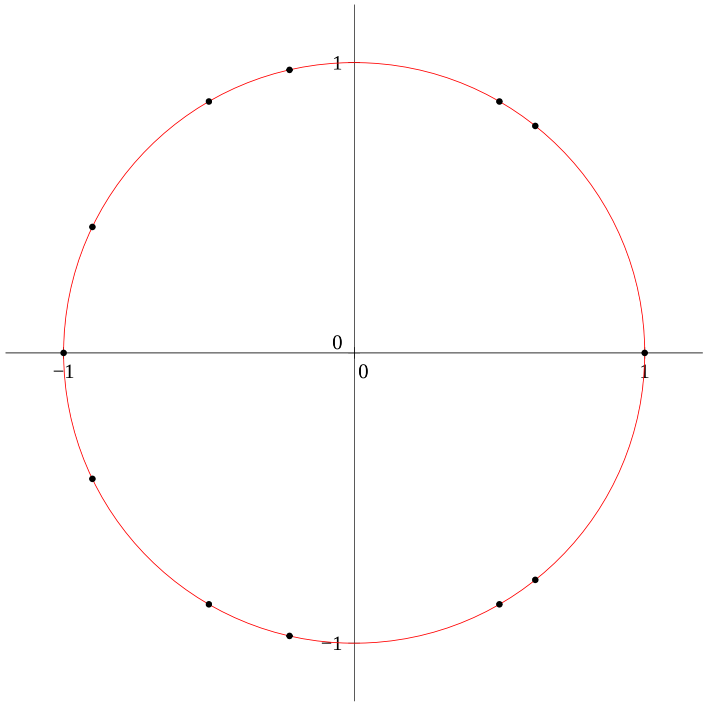
Deuxième méthode : utilisation de transformations sommes-produits.

Il est effectivement beaucoup plus rapide de faire des transformations sommes-produits de la forme $\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ sur les deux sinus extrêmes et sur les deux sinus du milieu. On trouve alors $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)+\sin(4x) = 2\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$. L'équation est donc vérifiée si $\sin\left(\frac{5x}{2}\right) = 0$, soit $\frac{5x}{2} \equiv 0[\pi]$, et donc $x \equiv 0\left[\frac{2\pi}{5}\right]$; ou si $\cos\left(\frac{3x}{2}\right) = \cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right)$, ce qui donne deux autres possiblités supplémantaires : soit $\frac{3x}{2} \equiv \pi - \frac{x}{2}[2\pi]$, donc on déduit $x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$; soit enfin $\frac{3x}{2} \equiv \frac{x}{2} - \pi[2\pi]$, qui donne $x \equiv \pi[2\pi]$. Si on regroupe toutes ces possiblités, on retrouve bien les mêmes solutions que par la première méthode (mais de façon plus directement explicite). Pour visualiser un peu, représentons les points correspondants sur le cercle trigonométrique :



Généralisation.

Pour la somme de six sinus, il vaut évidemment mieux utiliser la deuxième méthode. On peut commencer par utiliser nos formules sommes-produits sur les sinus deux à deux (les deux extrêmes, les deux médians, les deux autres), puis on utilise à nouveau une transformation somme-produit sur les cosinus extrêmes obtenus : $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)+\sin(4x)+\sin(5x)+\sin(6x) = 2\sin\left(\frac{7x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{5x}{2}\right)+\cos\left(\frac{3x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ $= 2\sin\left(\frac{7x}{2}\right)\left(2\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\cos(x)+\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{7x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)(2\cos(x)+1)$. Les solutions de l'équation initiale vérifient donc une des trois conditions suivantes : soit $\sin\left(\frac{7x}{2}\right) = 0$, ce qui donne $\frac{7x}{2} \equiv 0[\pi]$, donc $x \equiv 0\left[\frac{2\pi}{7}\right]$; soit $\cos\left(\frac{3x}{2}\right) = 0$, ce qui donne $\frac{3x}{2} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, donc $x \equiv \frac{\pi}{3}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$; soit encore $\cos(x) = -\frac{1}{2}$, ce qui donne $x \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$. On peut en fait regrouper les deux derniers cas (et le cas particulier $x = 0$ issu du premier cas) sous la forme $x \equiv 0\left[\frac{2\pi}{3}\right]$. On peut encore une fois placer toutes les solutions sur le cercle trigonométrique :



2. Première méthode : par un calcul de dérivée.

   Posons donc $f(x) = \arctan(x) + 2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{2}{1+(\sqrt{1+x^2}-x)^2} \times \left(\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1\right) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{2}{1+1+x^2-2x\sqrt{1+x^2}+x^2} \times \dfrac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+x^2-x\sqrt{1-x^2}} \times \dfrac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-x) \times \sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0$. La fonction f est donc sans surprise constante, on obtient sa valeur en calculant par exemple $f(0) = \arctan(0) + 2\arctan(1) = 0 + 2 \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

   Deuxième méthode : avec un peu de trigonométrie.

   Posons donc $x = \tan(\theta)$, avec $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ (ce qui est toujours possible puisque la fonction tangente effectue une bijection de cet intervalle vers $\mathbb{R}$). On a alors $\arctan(x) = \arctan(\tan(\theta)) = \theta$ car θ est justement dans l'intervalle image de la fonction arctangente. De plus, $\sqrt{1+x^2} - x = \sqrt{1+\tan^2(\theta)} - \tan(\theta) = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2(\theta)}} - \tan(\theta)$. Or, $\cos(\theta) \geqslant 0$ sur l'intervalle choisi, donc $\sqrt{1+x^2} - x = \dfrac{1}{\cos(\theta)} - \tan(\theta) = \dfrac{1-\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$. On voudrait donc que $\arctan\left(\dfrac{1-\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}$ (dans ce cas on aura bien $f(x) = \theta + 2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$). Comme $\dfrac{\theta}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right[$, l'angle $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}$ appartient à $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, il suffit donc de vérifier que sa tangente vaut $\dfrac{1-\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ pour avoir l'égalité souhaitée. Or, $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1-\tan(\frac{\theta}{2})}{1+\tan(\frac{\theta}{2})}$ (formule d'addition des tangentes), soit $\dfrac{\cos(\frac{\theta}{2}) - \sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2}) + \sin(\frac{\theta}{2})} = \dfrac{\cos^2(\frac{\theta}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2})}{(\cos(\frac{\theta}{2}) + \sin(\frac{\theta}{2}))^2} = \dfrac{\cos(\theta)}{1 + 2\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2})} = \dfrac{\cos(\theta)}{1+\sin(\theta)}$ (en utilisant les formules de duplication du cosinus et du sinus pour les dernières étapes). Il ne reste plus qu'à constater que $\dfrac{\cos(\theta)(1-\sin(\theta))}{1-\sin^2(\theta)} = \dfrac{1-\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ pour conclure cet affreux calcul !