AP : Séance n°3

PTSI B Lycée Eiffel

13 octobre 2017

Petits exercices et calculs variés

1. Calculer et simplifier $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{2i-1}{j}$.
2. Prouver que, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $\arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan(x+1) - \arctan(x)$. En déduire la valeur de la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$, puis sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^2$ (on factorisera le résultat).
4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 - 2^n$.
5. Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto 2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$. En déduire une expression plus simple de $f(x)$ (on admettra sans le vérifier que $\mathcal{D}_f = [-1, 1[$).

Du classique sur les sommes

On cherche dans cet exercice à trouver une belle formule pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)(k+5)}$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{k(k+2)(k+5)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+2} + \dfrac{c}{k+5}$.
2. En déduire la valeur de la somme demandée.
3. Redémontrer la formule précédente par récurrence.

Un peu de trigo ça ne peut pas faire de mal !

Les deux questions sont complètement indépendantes :

1. Résoudre l'équation $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = 0$ de deux manières différentes. Comme vous êtes courageux, résoudre aussi $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \sin(kx) = 0$.
2. Démontrer de deux façons différentes que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x) + 2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) = \dfrac{\pi}{2}$.