AP n°2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

15 septembre 2017

Un peu de logique

Tant qu'à faire, on peut rajouter une quantification devant les énoncés histoire de les rendre rigoureux :

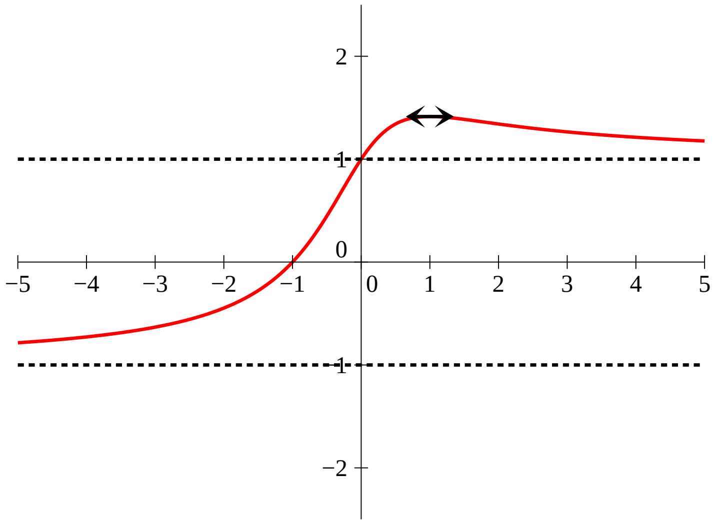
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ (dans l'autre sens ça ne marche pas car $x = -3$ convient également).
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > 0$.
- f est minorée $\Leftarrow f$ admet un minimum (une fonction peut être minorée sans avoir de minimum, par exemple si elle a une limite finie en $+\infty$).
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$ (même chose que pour la première proposition).
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x - 3| \geqslant 0 \Leftarrow x \geqslant 3$ (en fait, la proposition de gauche est toujours vraie, elle est impliquée par n'importe quoi).
- (u_n) admet une limite finie $\Rightarrow$ (u_n) est majorée (une suite peut être bornée sans avoir de limite, par exemple si elle est périodique ; par contre, si elle admet une limite finie, elle finit par avoir toutes ses valeurs dans un intervalle borné, et n'en prend qu'un nombre fini avant, ce qui assure l'existence d'une valeur maximale).
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (subtile différence avec la première proposition).
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x = e^y \Leftrightarrow \ln(x) = y$ (définition d'une réciproque).
- f est continue $\Leftarrow f$ est dérivable.

Quelques études de fonctions.

- La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ puisqu'on a toujours $x^2 + 1 > 0$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_1'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - (x+1) \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{x^2 + 1 - x(x+1)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée s'annule pour $x = 1$, où la fonction f_1 admet un maximum de valeur $f(1) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Pour le calcul des limites, on procède comme souvent en factorisant numérateur et dénominateur, mais attention, il y a un petit piège : $f_1(x) = \dfrac{x(1 + \frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}}$. Attention au fait que $\sqrt{x^2} = |x|$. Si $x > 0$, on trouve donc $f_1(x) = \dfrac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 1$, mais si $x < 0$, $f_1(x) = -\dfrac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = -1$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

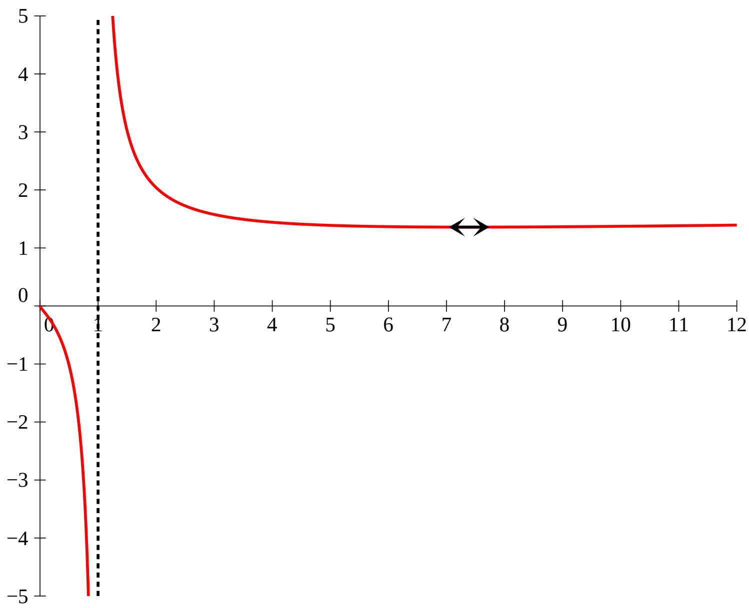
x	$-\infty$		1		$+\infty$
f_1	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

Si on veut être plus précis, on peut noter que $f_1(0) = 1$, et que f_1 est du signe de $x+1$, donc positive sur $[-1, +\infty[$. On conclut avec une première courbe :



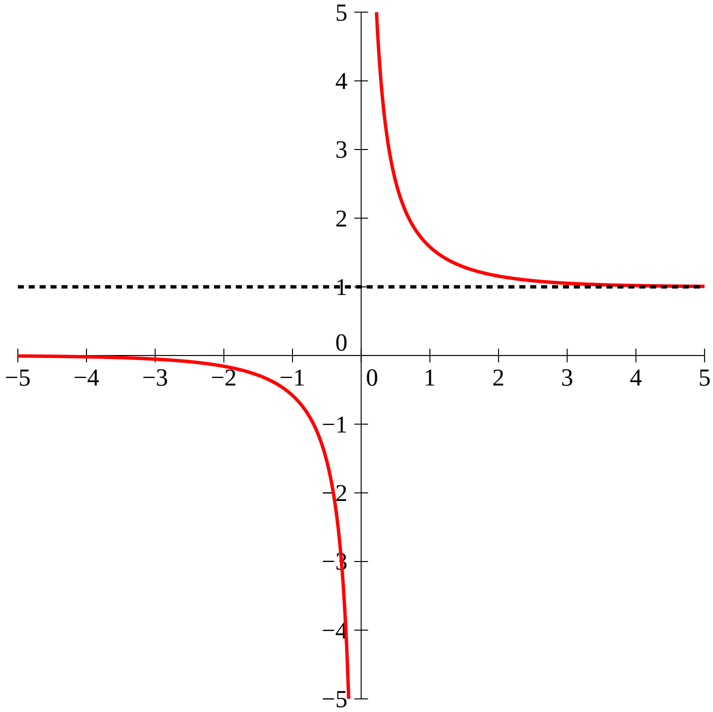
- La fonction f_2 est définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ (attention à la valeur d'annulation du logarithme !), elle est dérivable sur cet intervalle, de dérivée $f_2'(x) = \dfrac{\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x}}{\ln^2(x)} = \dfrac{\ln(x) - 2}{2\sqrt{x}\ln^2(x)}$. Notre fonction est donc décroissante sur $]0, 1[$ et sur $]1, e^2[$, admet un maximum de valeur $f_2(e^2) = \dfrac{e}{2}$, et est décroissante sur $]e^2, +\infty[$. On obtient sans difficulté $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 0$ (pas de forme indéterminée ici), $\lim\limits_{x\to 1^-} f_2(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f_2(x) = +\infty$, et enfin $\lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x) = +\infty$ par croissance comparée (pour les plus curieux, il n'y a pas d'asymptote oblique). On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	0		1		e^2		$+\infty$
f_2	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{e}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

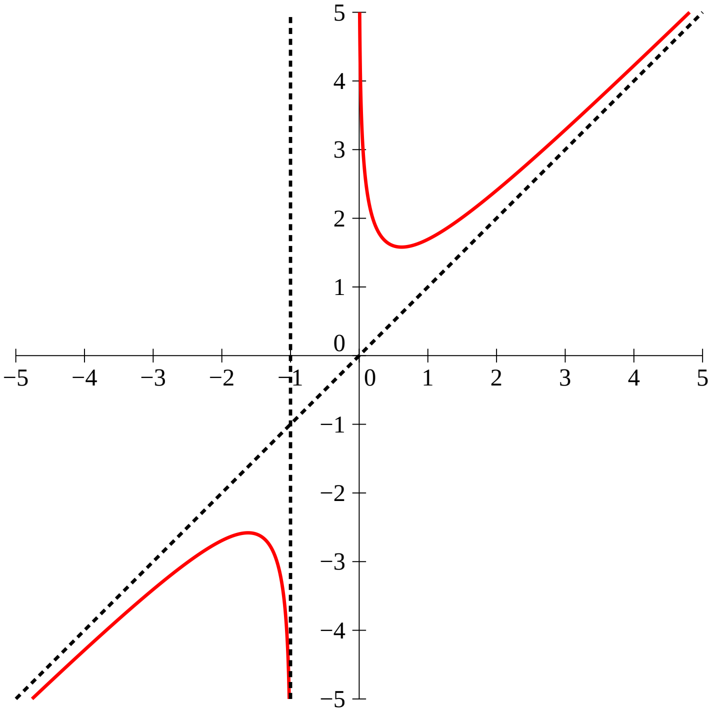


- La fonction f_3 est définie si $e^x \neq 1$, donc sur $\mathbb{R}^*$. Elle y est dérivable, de dérivée $f_3'(x) =$

$\dfrac{e^x(e^x-1)-e^{2x}}{(e^x-1)^2} = \dfrac{-e^x}{(e^x-1)^2}$, donc elle est décroissante sur chacun de ses deux intervalles de définition. On obtient immédiatement $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f_3(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f_3(x) = +\infty$. Seule la limite en $+\infty$ nécessite un petit calcul, on peut par exemple diviser numérateur et dénominateur par e^x pour écrire $f_3(x) = \dfrac{1}{1-e^{-x}}$, et en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = 1$. Je ne me fatigue pas à faire un tableau de variations, voici la courbe :



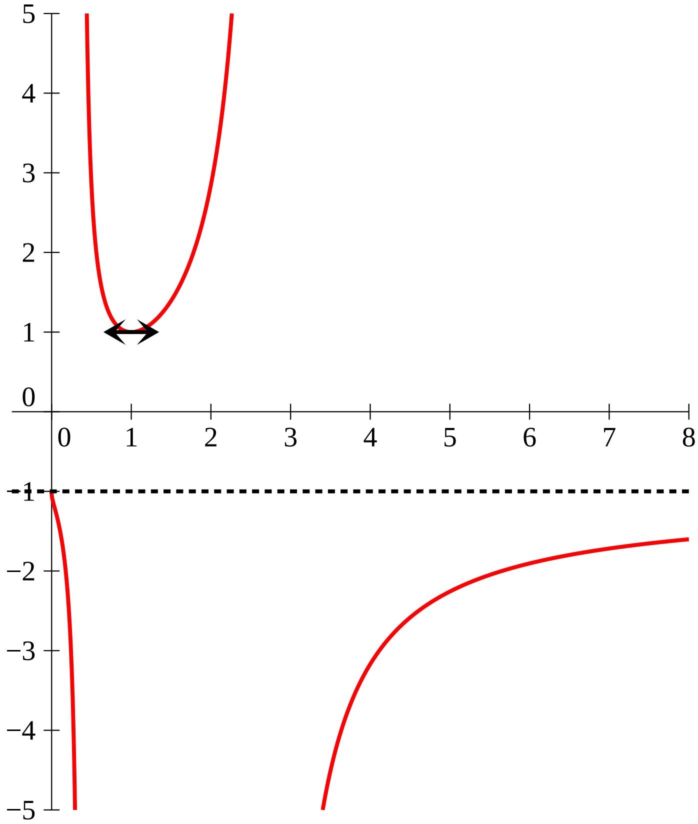
- La fonction f_4 est définie si $1+\dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x} > 0$. Cela se produit sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ (pas besoin de tableau de signe, j'espère !). Elle y est dérivable, de dérivée $f_4'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + 1 = 1 - \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{x^2+x-1}{x(x+1)}$. Le dénominateur de cette dérivée est toujours positif sur $\mathcal{D}_{f_4}$, et son numérateur a pour discriminant $\Delta = 1+4 = 5$, il s'annule pour $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (qui appartiennent tous les deux à notre domaine de définition). Les valeurs prises par la fonction aux deux extrema locaux n'ont vraiment aucun intérêt et sont particulièrement ignobles. Par contre, on peut constater que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$, ce qui prouve directement que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f_4 en $+\infty$ et en $-\infty$ (et accessoirement donne donc les limites de la fonction à l'infini). On calcule par ailleurs sans difficulté $\lim\limits_{x\to-1} f_4(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} f_4(x) = +\infty$, ce qui donne une courbe d'allure suivante :



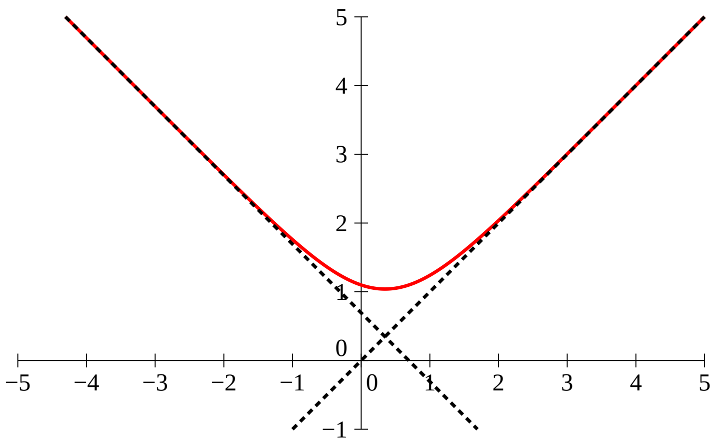
- Pour que f_5 soit définie, il faut bien sûr que x soit strictement positif, mais aussi que $1 - \ln^2(x)$ ne s'annule pas, ce qui impose $\ln(x) \neq \pm 1$, donc élimine les valeurs $x = e$ et $x = \dfrac{1}{e}$. Autrement dit, $\mathcal{D}_{f_5} = \left]0, \dfrac{1}{e}\right[\cup \left]\dfrac{1}{e}, e\right[\cup]e, +\infty[$. On calcule la dérivée $f_5'(x) = \dfrac{\frac{2\ln(x)}{x}(1 - \ln^2(x)) + \frac{2\ln(x)}{x}(1 + \ln^2(x))}{(1 - \ln^2(x))^2} = \dfrac{4\ln(x)}{x(1 - \ln^2(x))^2}$, qui est simplement du signe de $\ln(x)$. En particulier, on aura un minimum local de valeur $f(1) = 1$. Les limites à gauche et à droite en $\dfrac{1}{e}$ et en e sont infinies (le numérateur y prend des valeurs strictement positives, et par définition le dénominateur tend vers 0), et leur signe est celui de $1 - \ln^2(x)$, qui est négatif à l'extérieur de ses « racines ». En $+\infty$, on peut factoriser par $\ln^2(x)$ pour obtenir $f_5(x) = \dfrac{1 + \frac{1}{\ln^2(x)}}{1 - \frac{1}{\ln^2(x)}}$, qui tend facilement vers -1. C'est exactement la même chose en 0. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		1		e		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1

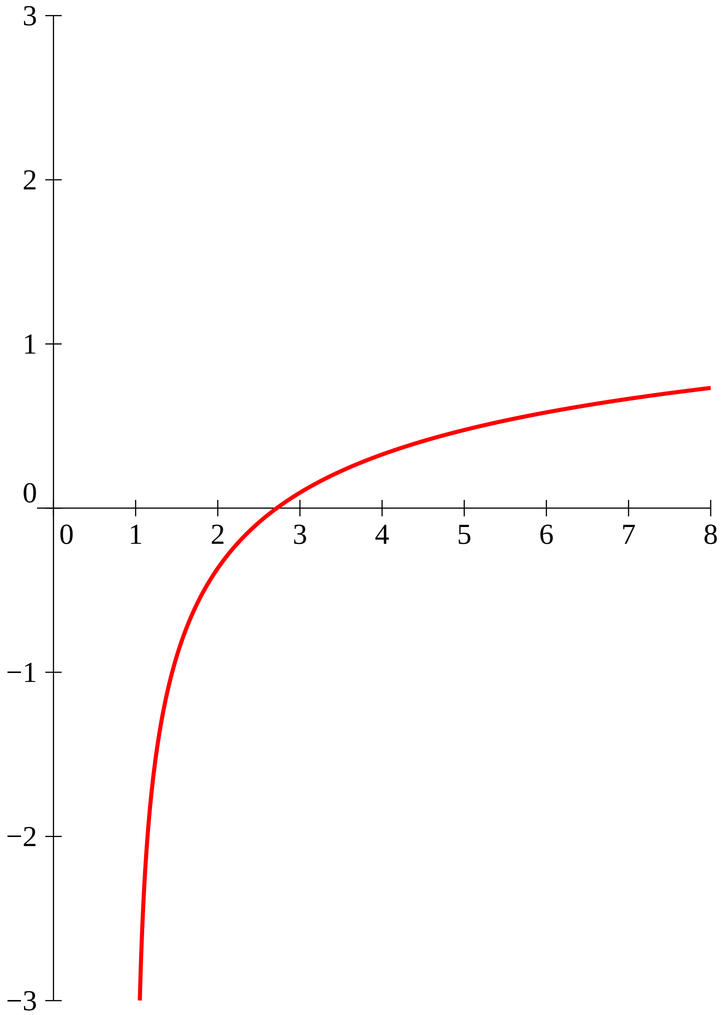
On trace ensuite la courbe :



- La fonction f_6 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (ce qui se trouve dans le ln est toujours strictement positif), de dérivée $f_6'(x) = \dfrac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}}$. La derivée est du signe de son numérateur, donc de $e^{2x} - 2$ (quitte à factoriser par e^{-x}). Or, $e^{2x} \geqslant 2$ si $x \geqslant \dfrac{\ln(2)}{2}$. On peut calculer $f_6\left(\dfrac{\ln(2)}{2}\right) = \ln\left(\sqrt{2} + \dfrac{2}{\sqrt{2}}\right) = \ln(2\sqrt{2}) = \dfrac{3}{2}\ln(2)$. De plus, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_6(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée). Avant de tracer la courbe, on peut s'intéresser aux asymptotes de f_6 : du côté de $+\infty$, on peut écrire $f_5(x) = \ln(e^x(1+2e^{-2x})) = x + \ln(1+2e^{-2x})$, avec le deuxième morceau qui a une limite nulle en $+\infty$. Cela suffit à prouver que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe de f_6 en $+\infty$. De même, la droite d'équation $y = -x + \ln(2)$ est asymptote en $-\infty$.



- La fonction f_7 est définie si $\ln(x) > 0$, donc sur $]1, +\infty[$ (et elle est positive sur $]e, +\infty[$). Pas la peine de calculer de dérivée, elle est évidemment croissante comme composée de fonctions croissantes. Pas de difficulté pour les limites non plus : $\lim_{x\to 1} f_7(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f_7(x) = +\infty$. Il n'y a plus qu'à tracer une allure de courbe !



- On commence bien sûr par mettre sous forme exponentielle : $f_8(x) = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$, cette fonction étant définie sur $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ (cf fonction 4). La fonction est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée $f_8'(x) = \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$. La parenthèse n'ayant pas un signe évident, on pose $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$, fonction qui a pour dérivée $g'(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$. La fonction g est donc croissante sur $]-\infty, -1[$. Comme $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ (calcul immédiat), g et donc f_8' sont positives sur $]-\infty, -1[$. Sur $]0, +\infty[$, au contraire, g est décroissante, mais on a de même une limite nulle en $+\infty$, donc f_8' est à nouveau positive sur cet intervalle. La fonction f_8 est donc croissante sur chacun de ses deux intervalles de définition. Il ne reste plus qu'à calculer les limites : en posant $X = \frac{1}{x}$, on constate que X tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$, et que $f(x) = e^{\frac{\ln(1+X)}{X}}$. On a dans l'exponentielle une limite classique vue en cours, qui est égale à 1, ce qui prouve que $\lim_{x\to\pm\infty} f_8(x) = e$. Pas de forme indéterminée en -1, ce qui est dans l'exponentielle tend vers $+\infty$ et $\lim_{x\to-1} f_8(x) = +\infty$. Enfin, en 0, on peut écrire $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x\ln(1+x) - x\ln(x)$ et appliquer la croissance comparée pour prouver que ce qui est dans l'exponentielle tend vers 0 et en déduire que $\lim_{x\to 0} f_8(x) = 1$.

On conclut avec une dernière courbe :