AP n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

8 septembre 2017

Simplifier les calculs suivants :

- $(-2)^3 = -8$
- $3x-5-(((2x-1)-(3+2x))-((-2x+1)-(3-x))) = 3x-5-((-4)-(-x-2)) = 3x-5-(x-2) = 2x-3$
- $\dfrac{25\times 12^2\times 10^3}{24\times 8^2\times 12^3} = \dfrac{5^2\times 2^4\times 3^2\times 2^3\times 5^3}{2^3\times 3\times 2^6\times 2^6\times 3^3} = 2^{-8}\times 3^{-2}\times 5^5 = \dfrac{3\ 125}{2\ 304}$
- $\sqrt{2592} = \sqrt{2\times 1296} = 2\sqrt{648} = 2\sqrt{2\times 324} = 4\sqrt{162} = 4\sqrt{2\times 81} = 36\sqrt{2}$
- $\dfrac{x^3+x^5}{x^4+x^6} = \dfrac{x^3(1+x^2)}{x^4(1+x^2)} = \dfrac{1}{x}$
- $(2x+1)^3-(3x+2)^2 = 8x^3+12x^2+6x+1-(9x^2+12x+4) = 8x^3+3x^2-6x-3$
- $\ln(72^3)-\ln(36^2) = 3\ln(8\times 9)-2\ln(6^2) = 3\ln(2^3\times 3^2)-2\ln(2^2\times 3^2) = 9\ln(2)+6\ln(3)-4\ln(2)-4\ln(3) = 5\ln(2)+2\ln(3)$.
- $\dfrac{(-ab^2)^2(ab^{-1})^3(-a^2b)}{-a^2c^{-5}(-a^{-1}bc^2)^3} = \dfrac{-a^2b^4a^3b^{-3}a^2b}{a^2c^{-5}a^{-3}b^3c^6} = -\dfrac{a^8}{bc}$.
- $(x\sqrt{3}-1)^2-3x\sqrt{3}+(\sqrt{3}-x)(x\sqrt{3}-1) = 3x^2-2\sqrt{3}x+1-3\sqrt{3}x+3x-\sqrt{3}-x^2\sqrt{3}+x = (3-\sqrt{3})x^2+(4-5\sqrt{3})x+1-\sqrt{3}$.

Résoudre les équations et inéquations :

- $8x^3+27\leqslant 0 \Leftrightarrow x^3\leqslant -\dfrac{27}{8} = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^3$. La fonction cube étant croissante sur $\mathbb{R}$, cela revient à dire que $x\leqslant -\dfrac{3}{2}$, donc $\mathcal{S} = \left]-\infty, -\dfrac{3}{2}\right]$.
- $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x(x-1)-x(x+1)+2}{x^2-1} = \dfrac{2-2x}{x^2-1}$. Le numérateur de cette expression ne s'annule que lorsque $x=1$, qui est une solution impossible pour notre équation, donc $\mathcal{S}=\emptyset$.
- e^{1-x^2} est toujours strictement positif, donc $\mathcal{S}=\emptyset$.
- On effectue le changement de variable $X=e^x$ pour se ramener à l'équation du second degré $5X^2-4X-1=0$, qui a pour discriminant $\Delta = 16+20=36$, et admet deux racines $X_1 = \dfrac{4-6}{10} = -\dfrac{1}{5}$ et $X_2 = \dfrac{4+6}{10} = 1$. La première valeur obtenue est incompatible avec le changement de variables effectué (une exponentielle est toujours positive), la seule possibilité est donc $X=1$, soit $x=\ln(1)=0$, donc $\mathcal{S}=\{0\}$.
- On commence par écrire l'équation sous la forme $2(\ln(x))^2+3\ln(x)-9=0$, puis on effectue le changement de variable $X=\ln(x)$ pour se ramener à l'équation du second degré $2X^2+3X-9=0$, de discriminant $\Delta = 9+72=81$, et admettant pour solutions $X_1 = \dfrac{-3-9}{4} = -3$

et $X_2 = \dfrac{-3+9}{4} = \dfrac{3}{2}$. On en déduit les valeurs correspondantes pour x : $e^{-3} = \dfrac{1}{e^3}$, et $x = e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e}$. Donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{e^3}, e\sqrt{e}\right\}$.

On calcule donc :

- $f(1) = \dfrac{1-3-1}{2+1-3-2} = \dfrac{3}{2}$
- $f(3) = \dfrac{27-9-1}{54+9-9-2} = \dfrac{17}{52}$
- $f(-2) = \dfrac{-8+6-1}{-16+4+6-2} = \dfrac{3}{8}$
- $f(-3) = \dfrac{-27+9-1}{-54+9+9-2} = \dfrac{19}{38} = \dfrac{1}{2}$
- $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{1}{8}-\frac{3}{2}-1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-2} = \dfrac{-\frac{19}{8}}{-3} = \dfrac{19}{24}$
- $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{-\frac{8}{27}+2-1}{-\frac{16}{27}+\frac{4}{9}+2-2} = \dfrac{\frac{19}{27}}{-\frac{4}{27}} = -\dfrac{19}{4}$
- $f(\sqrt{2}) = \dfrac{2\sqrt{2}-3\sqrt{2}-1}{4\sqrt{2}+2-3\sqrt{2}-2} = \dfrac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $f(-\sqrt{3}) = \dfrac{-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}-1}{-6\sqrt{3}+3+3\sqrt{3}-2} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}-1} = \dfrac{1+3\sqrt{3}}{26}$

Calculer les dérivées des fonctions suivantes (et étudier les variations si vous êtes courageux) :

- si $f(x) = x\sqrt{1-x}$, alors $f'(x) = \sqrt{1-x} + x \times \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$. La fonction f est définie sur $]-\infty, 1]$ et admet un maximum en $\dfrac{2}{3}$, de valeur $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.
- si $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)-1}$, alors $f'(x) = \dfrac{\ln(x)-1-1}{(\ln(x)-1)^2} = \dfrac{\ln(x)-2}{(\ln(x)-1)^2}$. La fonction est définie sur $\mathbb{R}^{+*}\backslash\{e\}$, elle est décroissante sur $]0, e[$ et sur $]e, e^2[$, croissante sur $]e^2, +\infty[$ et admet un minimum local en e^2, de valeur $f(e^2) = \dfrac{e^2}{2-1} = e^2$.
- si $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x-1)}$, alors $f'(x) = \dfrac{\ln(x-1) - \frac{x}{x-1}}{\ln^2(x-1)} = \dfrac{(x-1)\ln(x-1)-x}{\ln^2(x-1)}$, qui ne s'étudie pas facilement (on peut redériver le numérateur pour obtenir ses variations et en déduire des informations sur son signe si on veut vraiment pousser les calculs).
- si $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-x+2}{x^3-3x^2+3x-2}$, alors, en notant D le dénominateur de $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(3x^2+2x-1)(x^3-3x^2+3x-2)-(3x^2-6x+3)(x^3+x^2-x+2)}{D^2} \\
&= \frac{3x^5-9x^4+9x^3-6x^2+2x^4-6x^3+6x^2-4x-x^3+3x^2-3x+2-3x^5-3x^4+3x^3-6x^2 -}{D^2} \\
&= \frac{-4x^4+8x^3-12x^2+8x-4}{D^2}
\end{aligned}$$

Très bizarrement, cette dérivée s'étudie très bien puisqu'après avoir factorisé le numérateur par -4, on trouve pour l'annulation du numérateur ce qu'on appelle une équation bicarrée, qui se résout via le changement de variables $X = x + \frac{1}{x}$. En fait, ça n'a rien d'étonnant : $f(x) = \frac{(x+2)(x^2-x+1)}{(x-2)(x^2-x+1)} = \frac{x+2}{x-2}$ (ce qui se dérive tout de même beaucoup plus facilement).

- si $f(x) = \sqrt{x}\ln(x)e^x$, alors $f'(x) = \frac{\ln(x)e^x}{2\sqrt{x}} + \frac{e^x}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\ln(x)e^x = \frac{e^x}{2\sqrt{x}}(\ln(x) + 2 + 2x\ln(x))$, qui ne s'étudie pas bien (ceux qui ont du temps à perdre vérifieront en dérivant une deuxième fois que la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$).
- si $f(x) = -\frac{e^x}{e^x+2}$, alors $f'(x) = -\frac{e^x(e^x+2) - e^x \times e^x}{(e^x+2)^2} = -\frac{2e^x}{(e^x+2)^2}$. Cette dérivée est manifestement négative partout où elle est définie (donc sur $\mathbb{R}$ tout entier).
- si $f(x) = \frac{2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, alors $f'(x) = -\frac{4}{x^3}e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} \times \frac{2}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = -\frac{4x+2}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$, croissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, et décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right[$ et sur $]0, +\infty[$.
- si $f(x)\sqrt{2(\ln(x))^2 + \ln(x^2) - 3\ln(x)} = \sqrt{2\ln^2(x) - \ln(x)}$, alors $f'(x) = \frac{\frac{4\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}}{2\sqrt{2\ln^2(x) - \ln(x)}} = \frac{4\ln(x) - 1}{2x\sqrt{2\ln^2(x) - \ln(x)}}$. La fonction f est définie sur $]0, 1] \cup [\sqrt{e}, +\infty[$, elle est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$ (la valeur d'annulation du numérateur de la dérivée n'est pas dans le domaine de définition).
- si $f(x) = (1-2x)\sqrt{1-x^2}$, alors $f'(x) = -2\sqrt{1-x^2} + (1-2x) \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2(1-x^2) - x(1-2x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4x^2 - x - 2}{\sqrt{1-x^2}}$. La fonction f est définie sur $[-1, 1]$, et sa dérivée s'annule deux fois sur cet intervalle.