# Chapitre 13 : Intégration

PTSI B Lycée Eiffel

6 mars 2017

*Les mathématiciens sont comme les français :*
*quoique vous leur dites, ils le traduisent dans leur propre langue,*
*et le transforment en quelque chose de totalement différent.*

Goethe

*Qu'est-ce qu'un dilemme ?*
*Un lemme qui sert à prouver deux théorèmes !*

## Introduction

Comment, encore de l'intégration ? On n'avait donc pas déjà tout vu dans le chapître consacré aux équations différentielles ? Mais non, nous avions simplement travaillé la pratique (le calcul effectif d'intégrales) mais sans creuser la théorie : comment est définie la notion d'intégrale ? Nous comblerons ce manque en présentant la construction de l'intégrale de Riemann, qui permet notamment de justifier les calculs d'intégrales de fonctions continues (on peut faire mieux avec d'autres théories, mais c'est complètement superflu pour nous). Nous reverrons également également notre amie la formule de Taylor, sous une nouvelle forme faisant intervenir, vous l'aurez deviné, des intégrales.

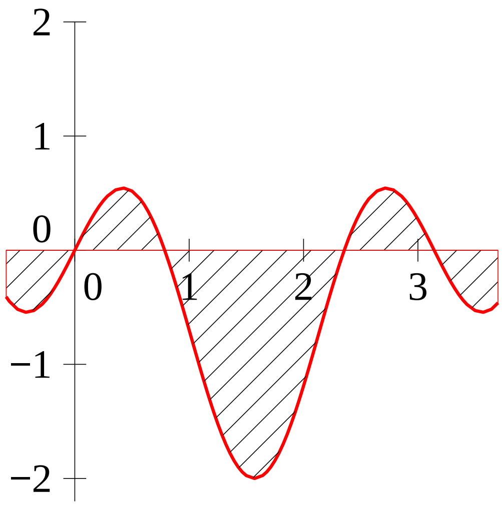
**Objectifs du chapitre :**

- comprendre comment la notion de primitive est reliée à la notion nettement plus géométrique de calcul d'aire.
- savoir utiliser les propriétés de l'intégration pour étudier des suites ou des fonctions définies par des intégrales.

## 1 Construction de l'intégrale

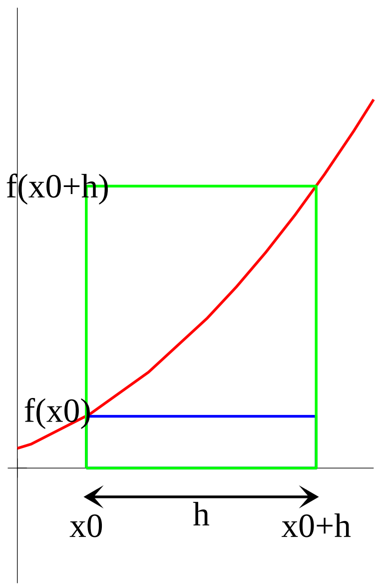
Avant de nous lancer dans le cours proprement dit, essayons de faire un petit calcul mal justifié permettant de comprendre comment ça fonctionne. L'intégration, comme vous le savez sûrement, a pour but de calculer des aires. Cette notion géométrique d'aire est loin d'être facile à définir et pose des problèmes de calcul effectif. Pour cela, comme vous le savez aussi, on recourt pour les calculs d'intégrale à la notion de primitive, qui est en quelque sorte l'opération inverse de la dérivation. Mais quel est le lien entre les deux ? Pour le comprendre, le plus simple est de se ramer à des calculs d'aires de formes géométriques très élémentaires : les rectangles.

Soit donc $f$ une fonction définie et continue sur un segment $[a; b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. On s'intéresse à la fonction $\mathcal{A}$ définie sur $[a; b]$ de la façon suivante : $\mathcal{A}(x_0)$ est l'aire de la portion de plan délimitée par les droites d'équation $x = a$ ; $x = x_0$ ; $y = 0$ et par la courbe $\mathcal{C}_f$. L'aire sera comptée positivement lorsque $\mathcal{C}_f$ se trouve au-dessus de l'axe des abscisses, négativement dans le cas contraire.




**Proposition 1.** La fonction $\mathcal{A}$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée la fonction $f$.

*Démonstration.* (non rigoureuse) Calculons le taux d'accroissement de $\mathcal{A}$ entre $x_0$ et $x_0 + h$ (où $h$ est un réel positif). Par définition, la quantité $\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)$ est l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = x_0$ et $x = x_0 + h$. Supposons pour la clarté du raisonnement la fonction croissante aux alentours de $x_0$ (le cas général n'est pas vraiment plus compliqué), on a donc une figure qui ressemble à ceci :




On peut encadrer l'aire qui nous intéresse par celle des deux rectangles de largeur $h$ dessinés sur la figure, l'un ayant pour hauteur $f(x_0)$ et l'autre $f(x_0 + h)$. On a donc $hf(x_0) \leqslant \mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) \leqslant$

$hf(x_0+h)$, ou encore $f(x_0) \leqslant \dfrac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$. Mais on obtient alors, en faisant tendre $h$ vers 0 et en utilisant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0)$ (notez qu'on a besoin pour cela de la continuité de la fonction $f$). En procédant de la même manière pour $h<0$, on montre la dérivabilité de la fonction $\mathcal{A}$, et on a bien $\mathcal{A}'(x_0) = f(x_0)$. □

Le principe de base de cette méthode (tracer des rectangles) est à la base d'une méthode de calcul approché d'intégrales dont nous reparlerons en fin de chapître. En attendant, essayons de définir plus rigoureusement cette fameuse notion d'aire sous une courbe, encore une fois en utilisant des rectangles.

## 1.1 Fonctions en escalier

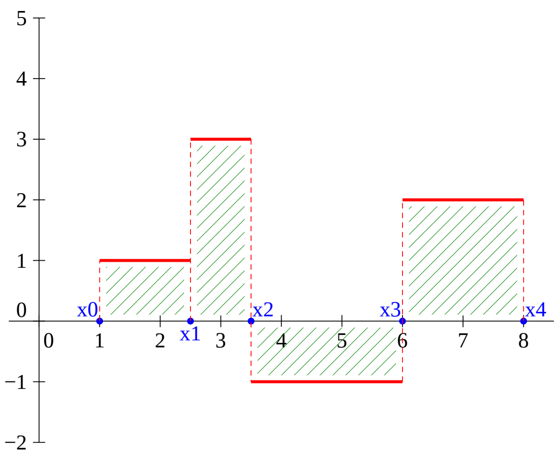
**Définition 1.** Soit $[a,b]$ un segment, une liste de $n+1$ réels $\tau = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ constitue une **subdivision** du segment $[a,b]$ si $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a$. Le **pas** de la subdivision $\tau$ est le réel strictement positif $h = \max(x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1})$.

*Remarque* 1. En fait, il serait plus rigoureux de dire que les intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, pour $i$ variant entre 0 et $n-1$, constituent une subdivision de $[a,b]$.

**Proposition 2.** Soient $\tau$ et $\tau'$ deux subdivisions d'un même intervalle $[a,b]$, alors $\tau \cup \tau'$ est encore une subdivision de $[a,b]$ (en réordonnant les différents réels).

**Définition 2.** Une fonction $\varphi$ est une **fonction en escalier** sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\tau = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\varphi_{|]x_i, x_{i+1}[}$ est une fonction constante. La subdivision $\tau$ est alors appelée **subdivision adaptée** à la fonction en escalier $\varphi$.

*Remarque* 2. Les valeurs prises par la fonction en $x_0$, $x_1$ etc n'ont aucune importance, et ne doivent pas nécessairement être égales à l'une des deux valeurs prises sur les intervalles ayant $x_i$ pour borne. Un exemple de fonction en escalier sur le segment $[1,8]$ et de subdivision adaptée à cette fonction (les aires servant à la définition de l'intégrale sont également indiquées) :




**Proposition 3.** L'ensemble des fonctions en escalier sur un segment est stable par somme et par produit par un réel (ce qui en fait un espace vectoriel réel).

*Démonstration.* Considérons donc deux fonctions $\varphi$ et $\psi$, en escalier sur $[a,b]$, et $\tau$ et $\tau'$ deux subdivisions adaptées respectivement à $\varphi$ et à $\psi$. La subdivision $\tau \cup \tau'$ est alors une subdivision adaptée à la fois à $\varphi$ et à $\psi$. En effet, chacun des intervalles définis par $\tau \cup \tau'$ est inclus dans un des intervalles définis par $\tau$, la fonction $\varphi$ y est donc constante, et de même pour $\psi$. Chacune des deux fonctions étant constante sur les intervalles définis par $\tau \cup \tau'$, la somme de $\varphi$ et $\psi$ le sera aussi, ainsi que les produits de $\varphi$ et de $\psi$ par des réels, et est donc aussi une fonction en escalier sur $[a,b]$. □

**Définition 3.** Soit $\varphi$ une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $\tau = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à $\varphi$, alors l'**intégrale de $\varphi$ sur le segment** $[a,b]$ est le nombre réel $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\alpha_k$, où $\alpha_k$ est la valeur constante prise par $\varphi$ sur l'intervalle $]x_k, x_{k+1}[$. Cette intégrale est notée $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\ dx$.

*Remarque* 3. La variable $x$ apparaissant dans la dernière notation introduite est une variable muette (comme l'indice d'une somme par exemple) qui peut être remplacée par n'importe quelle autre variable tant qu'on modifie également le $dx$ qui suit : $\displaystyle\int_a^b \varphi(w)\ dw = \int_a^b \varphi(x)\ dx$.

**Proposition 4.** L'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment ne dépend pas de la subdivision $\tau$ choisie.

*Démonstration.* Soient $\tau$ et $\tau'$ deux subdivisions adaptées à une même fonction $\varphi$, alors $\tau \cup \tau'$ est également une subdivision adaptée à $\varphi$ (nous l'avons démontré un peu plus haut), il suffit alors de constater que l'intégrale donnée par $\tau$ et par $\tau \cup \tau'$ est identique (ce sera également le cas pour $\tau'$ et $\tau \cup \tau'$, donc pour $\tau$ et $\tau'$). Or, pour passer de $\tau$ à $\tau \cup \tau'$, on se contente de découper chaque intervalle de $\tau$ en (éventuellement) plusieurs intervalles. L'égalité découle alors de la distributivité des sommes : si $i$ réels $y_1, \dots, y_i$ apparaissent entre $x_k$ et $x_{k+1}$, en notant $y_0 = x_k$ et $y_{i+1} = x_{k+1}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{i}(y_{j+1} - y_j)\alpha_k = \alpha_k \sum_{j=0}^{i}(y_{j+1} - y_j) = \alpha_k(x_{k+1} - x_k)$. □

**Proposition 5.** L'application $\varphi \mapsto \displaystyle\int_a^b \varphi(x)\ dx$ est une application linéaire : $\displaystyle\int_a^b \varphi(x) + \psi(x)\ dx = \int_a^b \varphi(x)\ dx + \int_a^b \psi(x)\ dx$, et $\displaystyle\int_a^b \lambda\varphi(x)\ dx = \lambda \int_a^b \varphi(x)\ dx$. De plus, $\forall c \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^c \varphi(x)\ dx + \int_c^b \varphi(x)\ dx$ (résultat connu sous le nom de relation de Chasles). Enfin, si la fonction $\varphi$ est positive sur le segment $[a,b]$, son intégrale sur $[a,b]$ est positive (résultat connu sous le nom de positivité de l'intégrale).

*Démonstration.* En prenant une subdivision adaptée simultanément à deux fonctions en escalier $\varphi$ et $\psi$, la linéarité de l'intégrale découle une fois de plus de la distributivité dans les sommes. Notons $\alpha_k$ et $\beta_k$ les valeurs respectives prises par $\varphi$ et $\psi$ sur les intervalles de la subdivision commune, alors $\displaystyle\int_a^b (\varphi + \psi)(x)\ dx = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)(\alpha_k + \beta_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\alpha_k + \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\beta_k = \int_a^b \varphi(x)\ dx + \int_a^b \psi(x)\ dx$. Le produit par une constante, encore une fois, est encore plus simple. La relation de Chasles est une conséquence encore plus simple de l'associativité de la somme (on ajoute $c$ à la subdivision, ce qui ne change pas l'intégrale comme on l'a vu précédemment, et on sépare la somme en deux), et la positivité est carrément triviale : une somme de réels positifs est certainement positive. □

## 1.2 Intégrale d'une fonction continue

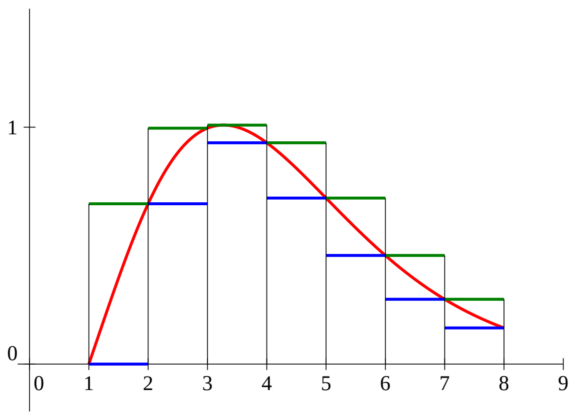
Dans tout ce paragraphe, ainsi que dans la suite du chapître, $f$ désigne une fonction continue sur un segment $[a,b]$.

**Théorème 1.** Approximation des fonctions continues par des fonctions en escalier.
Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$ et $\varepsilon$ un réel strictement positif. Alors il existe une fonction $\varphi$ en escalier sur $[a,b]$ telle que $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) \leqslant f(x)$ et $|f(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon$.

*Démonstration.* Nous admettrons ce résultat, qui est hors programme. Il nécessite en fait le théorème de Heine (hors programme), qui est lui-même une conséquence du théorème de Bolzano-Weierstraß (encore hors-programme, même si celui-là a été énoncé et même démontré dans notre chapître sur les suites). Pour essayer de comprendre l'idée (et ce qui pose problème), un début de raisonnement : $f$ étant supposée continue en $a$, il existe certainement un intervalle de la forme $[a, x_1]$ sur lequel $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$ (c'est la définition de la limite qui nous le donne). On peut poser $\varphi(x) = \inf_{x \in [a, x_1]} f(x)$ sur l'intervalle $[a, x_1]$. Ensuite, de la même manière, on trouve $x_2$ tel que $|f(x_1) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ sur $[x_1, x_2]$, ce qui permet de poser $\varphi(x) = \inf_{x \in [x_1, x_2]} f(x)$ sur $]x_1, x_2]$. Et ainsi de suite, on construit une subdivision $\tau$ et une fonction en escalier vérifiant les hypothèses du théorème. Le problème est qu'on n'a aucun contrôle sur le pas de la subdivision créée : on pourrait très bien avoir des intervalles de plus en plus petits, et ne jamais approcher de $b$, la deuxième borne de notre segment. Le théorème de Heine assure justement que ce ne sera pas le cas, en « renversant » les quantificateurs dans la définition de la continuité : il assure que, si $f$ est continue sur $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta$ tel que $\forall (x, y) \in [a, b]^2$, $|x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Le réel $\eta$ ne dépend plus de $\varepsilon$, ce qui change tout. □

**Théorème 2.** En notant $\mathcal{E}^- = \{\varphi | \forall x \in [a, b], \varphi(x) \leqslant f(x)\}$ avec $\varphi$ en escalier sur $[a, b]$, et $\mathcal{E}^+ = \{\psi | \forall x \in [a, b], \psi(x) \geqslant f(x)\}$ (où $\psi$ est, comme vous l'aurez deviné, en escalier sur $[a, b]$), alors $\sup_{\varphi \in \mathcal{E}^-} \int_a^b \varphi(x)\, dx = \inf_{\psi \in \mathcal{E}^+} \int_a^b \psi(x)\, dx$.

*Démonstration.* Une petite illustration de ce théorème, qui dit simplement qu'on peut encadrer une fonction continue par deux fonctions en escalier, dont les intégrales peuvent être rendues aussi proches qu'on le souhaite (ici avec un pas constant, une fonction en escalier minorant $f$ en bleu, et une majorant $f$ en vert) :




La démonstration est en fait relativement simple avec le théorème précédent. On peut déjà constater que $\forall \varphi \in \mathcal{E}^-, \forall \psi \in \mathcal{E}^+$, $\int_a^b \varphi(x)\, dx \leqslant \int_a^b \psi(x)\, dx$ (c'est par exemple une conséquence de la positivité et de la linéarité de l'intégrale, en constatant que la fonction $\psi - \varphi$ est toujours positive). On en déduit que $\sup_{\varphi \in \mathcal{E}^-} \int_a^b \varphi(x)\, dx \leqslant \inf_{\psi \in \mathcal{E}^+} \int_a^b \psi(x)\, dx$ (au passage cela prouve l'existence de la borne supérieure et de la borne inférieure, car le membre de gauche, par exemple, est majoré par l'intégrale de n'importe quelle fonction en escalier majorant $f$, et de telles fonctions existent). Ensuite, le théorème assure l'existence d'une fonction $\varphi \in \mathcal{E}^-$ telle que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) - \varphi(x) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ (qui est un nombre strictement positif comme les autres), mais aussi de $\psi \in \mathcal{E}^+$ telle que $\forall x \in [a, b]$, $\psi(x) - f(x) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ (on applique le théorème à $-f$ et on prend l'opposé de la fonction obtenue). On a donc, $\forall x \in [a,b]$, $0 \leqslant \psi(x) - \varphi(x) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. La fonction $\psi - \varphi$ et a une intégrale positive et majorée par $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) \times \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$. Autrement dit, en appliquant la linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier, $\displaystyle\int_a^b \psi(x)\ dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\ dx + \varepsilon$. Cela prouve que $\displaystyle\sup_{\varphi\in\mathcal{E}^-} \int_a^b \varphi(x)\ dx \geqslant \inf_{\psi\in\mathcal{E}^+} \int_a^b \psi(x)\ dx - \varepsilon$. Comme cette inégalité est vraie quelle que soit $\varepsilon > 0$, les deux membres sont nécessairement égaux. □

**Définition 4.** L'**intégrale de la fonction $f$ sur le segment** $[a,b]$ est le nombre réel $\displaystyle\sup_{\varphi\in\mathcal{E}^-} \int_a^b \varphi(x)\ dx = \inf_{\psi\in\mathcal{E}^+} \int_a^b \psi(x)\ dx$. On le note $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$.

**Proposition 6.** La linéarité de l'intégrale est conservée sur l'ensemble des fonctions continues, ainsi que la relation de Chasles et la positivité.

*Démonstration.* Cette démonstration un peu technique fait intervenir la caractérisation des bornes supérieure et inférieure. Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a,b]$, $\lambda$ et $\mu$ deux réels, et $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe une fonction en escalier $\varphi$ majorée par $f$ sur $[a,b]$ telle que $\displaystyle 0 \leqslant \int_a^b f(x) - \varphi(x)\ dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2\lambda}$. De même, il existe une fonction $\psi$ majorée par $g$ telle que $\displaystyle\int_a^b g(x) - \psi(x)\ dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2\mu}$. La fonction $\xi = \lambda\varphi + \mu\psi$ est alors une fonction en escalier majorée par $\lambda f + \mu g$ et telle que $\displaystyle\int_a^b \xi(x)\ dx \geqslant \lambda \int_a^b f(x) + \mu \int_a^b g(x) - \varepsilon$. Comme, par définition, $\displaystyle\int_a^b \xi(x)\ dx \leqslant \int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\ dx$, on en déduit que $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\ dx \geqslant \lambda \int_a^b f(x)\ dx + \mu \int_a^b g(x)\ dx - \varepsilon$. Cela étant vrai quelle que soit la valeur de $\varepsilon$, $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\ dx \geqslant \lambda \int_a^b f(x)\ dx + \mu \int_a^b g(x)\ dx$. On prouve l'inégalité dans l'autre sens de la même façon, à l'aide de fonctions en escalier majorantes, et on en déduit la linéarité.
La relation de Chasles est plus facile à prouver : si $\varphi$ minore $f$ sur $[a,b]$, alors la restriction de $\varphi$ à $[a,c]$ et à $[c,b]$ minore les restrictions de $f$ à chacun des deux intervalles, et $\displaystyle\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx \geqslant \int_a^b \varphi(x)\ dx + \int_c^b \varphi(x)\ dx = \int_a^b \varphi(x)\ dx$. Comme cela est vrai pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{E}^-$, on en déduit que $\displaystyle\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx \geqslant \int_a^b f(x)\ dx$. Encore une fois, l'inégalité réciproque se prouve à l'aide de fonction en escalier majorantes, de la même manière.
Le dernier point est de loin le plus facile : si $f$ est positive sur $[a,b]$, la fonction nulle appartient à $\mathcal{E}^-$, et comme son intégrale est nulle, on en déduit que $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \geqslant 0$. □

**Proposition 7.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b g(x)\ dx$.

*Démonstration.* C'est une conséquence des propriétés précédentes : si $f \leqslant g$, alors $g - f \geqslant 0$, donc par positivité de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(x) - f(x)\ dx$. Il suffit alors d'appliquer la linéarité de l'intégrale pour conclure. □

*Remarque* 4. Ce résultat signifie simplement qu'on peut intégrer des inégalités. Il sera souvent appliqué dans un cas très particulier où l'une des deux fonctions est constante : si $f$ est majorée par $M$ et minorée par $m$ sur $[a,b]$, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\ dx \leqslant M(b-a)$.

**Proposition 8.** Soit $f$ une fonction continue et positive sur $[a,b]$, alors $f$ est nulle si et seulement si $\int_a^b f(x)\ dx = 0$.

*Démonstration.* Il y a une implication évidente, pour démontrer l'autre sens on procède par contraposée. Supposons que $f$ ne soit pas nulle sur $[a,b]$. Il existe donc un réel $x \in ]a,b[$ tel que $f(c) > 0$ (même si le maximum de $f$ est atteint en une borne de l'intervalle, par continuité, $f$ restera strictement positive à l'intérieur). Par continuité, on peut en déduire l'existence d'un intervalle $]c-\eta, c+\eta[$ sur lequel $f(x) \geqslant \dfrac{f(c)}{2}$. La fonction $f$ est alors minorée par la fonction en escalier $\varphi$ valant $\dfrac{f(c)}{2}$ sur $]c-\eta, c+\eta[$ et 0 ailleurs. Cette fonction en escalier ayant pour intégrale $\eta f(c) > 0$, on en déduit que $\int_a^b f(x)\ dx > 0$, ce qui prouve notre deuxième implication. □

**Proposition 9.** Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$, alors $\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx$.

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer la propriété précédente : $f \leqslant |f|$, donc $\int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx$. Mais comme $-f \leqslant |f|$ également, on peut aussi écrire $-\int_a^b -f(x)\ dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx$. La combinaison des deux inégalités prouve la propriété. Cette propriété est d'ailleurs visuellement évidente, l'intégrale de $|f|$ revient à calculer positivement toutes les aires comprises entre la courbe et l'axe des abscisses (y compris sur les intervalles où $f$ est négative), on obtient forcément une valeur plus grande qu'en calculant la valeur absolue de l'intégrale de $f$, où certaines portions peuvent être comptées négativement. □

**Définition 5.** La **valeur moyenne** de $f$ sur $[a,b]$ est le nombre réel $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$.

*Remarque* 5. Cette valeur représente la largeur d'un rectangle dont l'aire est égale à celle donnée par l'intégrale de la fonction $f$, ce qui correspond bien à une notion de valeur moyenne.

*Remarque* 6. Tous les résultats énoncés dans ce paragraphe peuvent s'étendre facilement à des fonctions qui ne sont pas tout à fait continues, mais seulement continues par morceaux (c'est-à-dire continues sur tous les intervalles délimités par une certaine subdivision de $[a,b]$). Il suffit pour cela de définir l'intégrale de la fonction comme la sommes des intégrales des fonctions continues sur chacun des intervalles de la subdivision, en parfaite cohérence avec la relation de Chasles. La construction de l'intégrale que nous avons donnée fonctionne d'ailleurs pour une classe de fonctions plus large que les fonctions continues, qu'on appelle fonctions réglées (mais que nous n'étudierons pas cette année). Il existe d'autres façons de définir rigoureusement l'intégrale, celle que nous avons étudiée est l'intégrale de Riemann, et il existe notamment une intégrale de Lebesgue qui permet de définir l'intégrale sur une classe de fonctions encore nettement plus large, appelées fonctions mesurables. Bref, même si ça ne vous saute pas aux yeux, nous avons fait au plus simple !

*Remarque* 7. On peut également définir assez facilement des intégrales de fonctions continues sur un segment et à valeurs complexes : si $f(x) = g(x) + ih(x)$, avec $g$ et $h$ deux fonctions continues à valeurs réelles, alors on pose $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b g(x)\ dx + i\int_a^b h(x)\ dx$. Par exemple, on peut calculer $\int_0^\pi e^{ix}\ dx = \int_0^\pi \cos(x)\ dx + i\int_0^\pi \sin(x)\ dx = [\sin(x)]_0^\pi + i[-\cos(x)]_0^\pi = 2i$ (après, à vous de voir si vous arrivez à donner une signification intéressante à ce résultat).

### 1.3 Lien avec les primitives

**Proposition 10.** Soit $f$ continue sur $I$ et $a \in I$, alors la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$ est une primitive de $f$ sur $I$. Il s'agit de l'unique primitive de $f$ sur $I$ s'annulant en $a$.

*Démonstration.* L'unicité est évidente : si deux primitives de $f$ s'annulent en $a$, puisqu'elles diffèrent d'une constante, cette constante et nécessairement nulle. La première partie du théorème revient à prouver rigoureusement le résultat donné dans l'introduction de ce chapître. Fixons un réel $x \in I$ et considérons un autre réel $h > 0$ tel que $[x, x+h[ \subset I$, on peut alors écrire $F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\ dt = \int_a^x f(t)\ dt + \int_x^{x+h} f(x) + (f(t) - f(x))\ dt = F(x) + hf(x) + \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\ dt$. Fixons $\varepsilon > 0$. La fonction $f$ étant continue en $x$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que, $\forall t \in ]x-\eta, x+\eta[$, $|f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. En intégrant cette inégalité entre $x$ et $x+h$, on obtient $\left|\int_x^{x+h} f(t) - f(x)\ dt\right| \leqslant \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\ dt \leqslant h\varepsilon$. En divisant tout par $h$, on obtient donc la majoration suivante : $\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$, quitte à prendre des valeurs de $h$ suffisamment proches de 0. Cette inégalité étant vraie pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut en déduire que $\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$, soit $F'(x) = f(x)$. On a bien prouvé que la fonction $F$ était une primitive sur $I$ de $f$. □

**Corollaire 1.** Toute fonction continue sur un segment y admet une primitive.

*Remarque* 8. Elle en admet même une infinité, qui diffèrent toutes d'une constante, mais toutes les primitives ne peuvent pas nécessairement se mettre sous la forme précédente puisqu'elles ne s'annulent pas nécessairement sur $I$. Ce résultat permet notamment de justifier la définition de la fonction ln comme **la** primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$ s'annulant en 1. Il est tellement important qu'il est parfois désigné sous la dénomination de théorème fondamental de l'analyse.

**Exercice :** étude d'une suite d'intégrales. C'est un sujet d'exercices récurrent, pour lequel il faut connaitre les méthodes classiques. On définit une suite $(I_n)$ par $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\ dt$.

1. Calculer les valeurs de $I_0$, $I_1$ et $I_2$.
2. Déterminer la monotonie de la suite $(I_n)$, et en déduire la convergence de la suite.
3. En écrivant $1 - I_n$ sous la forme d'une intégrale, déterminer la limite de $1 - I_n$, puis prouver que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 1$.

1. On calcule donc $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{2}\ dt = \frac{1}{2}$ ; puis $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\ dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$ ; et enfin $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\ dt = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. Notons que les valeurs suivantes des termes d ela suite seraient nettement plus techniques à calculer. on est notamment complètement incapables de donner une expression explicite pour $I_n$.
2. Calculons donc $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^{n+1}} - \frac{1}{1+t^n}\ dt = \int_0^1 \frac{t^n - t^{n+1}}{(1+t^{n+1})(1+t^n)}\ dt$. Cette intégrale est celle d'une fonction positive sur $[0,1]$ (le dénominateur est clairement positif, et sur $[0,1]$, $t^{n+1} \leqslant t^n$), donc $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$, ce qui prouve la croissance de la suite $(In)$. Une façon légèrement différente de rédiger ce calcul est de procéder par inégalités successives sur les fonctions intervenant sous l'intégrale, pour finir par intégrer les inégalités obtenues. La suite $(I_n)$ est par ailleurs majorée, car $\frac{1}{1+t^n} \leqslant 1$ sur $[0,1]$ (quelle que soit la valeur de $n$), donc $I_n \leqslant \int_0^1 1\ dt = 1$. Elle converge donc.

3. Calculons $1-I_n = \int_0^1 1\ dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\ dt = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\ dt$. Par la même majoration que tout à l'heure, $1-I_n \leqslant \int_0^1 t^n\ dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Par ailleurs, $1-I_n \geqslant 0$ puisque $I_n \leqslant 1$. Une simple application du théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-I_n = 0$, ce qui revient bien à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1$.

# 2 Formules de Taylor, le retour

**Théorème 3.** Formule de Taylor avec reste intégral.
Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $I$ et $a \in I$, alors $\forall x \in I$,
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt.$

*Démonstration.* Pour comprendre (et même simplement retenir) cette formule, écrivons-là pour $n = 0$ : $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\ dt$. En effet, cette égalité est pratiquement évidente puisque l'intégrale vaut $f(x) - f(a)$. Comment faire maintenant pour transformer le $f'$ en $f''$ dans l'intégrale et obtenir la formule au rang suivant ? Tout simplement en faisant une IPP. On pose $u(t) = f'(t)$, soit $u'(t) = f''(t)$, et $v'(t) = 1$. La seule subtilité consiste à choisir $v(t) = t - x$, qui est bien une primitive de $v'$, et on trouve exactement la formule au rang 1. Plus généralement, la formule se prouve par récurrence. L'initialisation a déjà été prouvée, pour l'hérédité, on va faire une IPP en posant $u(t) = f^{(n+1)}(t)$, donc $u'(t) = f^{(n+2)}(t)$ ; et $v'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$, soit $v(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$. On trouve alors $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ dt$. Le crochet valant $\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)$, on trouve bien la formule au rang $n+1$. □

**Définition 6.** Le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$ est le **polynôme de Taylor d'ordre** $n$ **de** $f$ **en** $a$, noté $T_n(X)$. La différence $f(x) - T_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt$ est le **reste intégral d'ordre** $n$ **de** $f$ **en** $a$, noté $R_n(x)$.

**Théorème 4.** Formule de Taylor-Lagrange.
Sous les mêmes hypothèses que pour la formule de Taylor avec reste intégral, on a la majoration $|R_n(x)| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$, où $M_{n+1} = \sup\limits_{t\in I} |f^{n+1}(t)|$.

*Démonstration.* Il suffit de majorer le reste intégral obtenu dans le précédent théorème. On majore $|f^{n+1}(t)|$ par $M_{n+1}$, et il reste à calculer $\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^x = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$. □

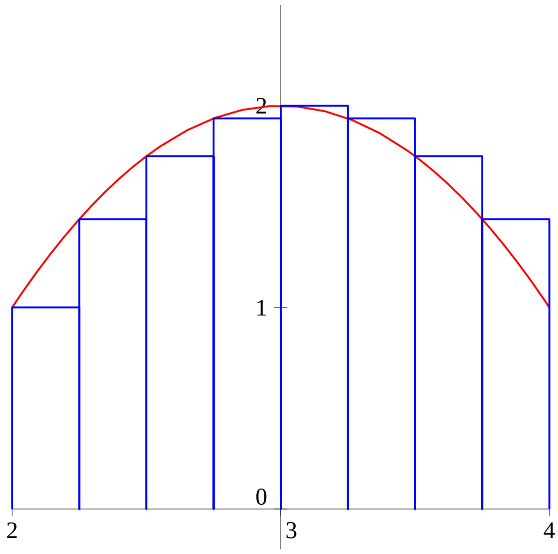
**Exemple :** En considérant $f(x) = \ln(1+x)$ et $a = 0$, on prouve aisément que $\forall k \geqslant 1$, $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ (par récurrence si on tient à être rigoureux). La formule de Taylor avec reste intégral donne alors $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\ dt$. En particulier, le polynôme de Taylor d'ordre $n$ de $f$ en 0 est $T_n = x - \frac{1}{2}x^+ \frac{1}{3}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.

## 3 Calcul numérique d'intégrales

Dans la première partie de ce chapître ainsi que dans nos incursions précédentes dans le domaine de l'intégration, nous nous sommes uniquement intéressés au calcul exact d'intégrales, qui constituera de toute façon la totalité des questions que vous pourrez avoir sur le sujet à vos écrits de concours. Mais si vous demandez à votre calculatrice préférée (en supposant qu'elle n'est pas trop calée en calcul formel) de vous donner la valeur d'une intégrale, elle va procéder de façon bien différente. Les méthodes d'intégration numérique ont pour but de créer des suites approchant la valeur d'une intégrale donnée, en maîtrisant l'erreur commise (si on ne connait pas l'erreur, le calcul ne sert à rien), et de préférence avec le moins de calculs possibles. Nous allons en présenter trois, la première n'étant qu'une redite de choses vues dès la présentation de ce chapître.

### 3.1 Méthode des rectangles

**Principe :** On approche la courbe par des rectangles de largeur constante (en nombre fixé à l'avance) et de hauteur égale à l'image d'un des réels de chaque intervalle. Ainsi, en prenant un entier naturel non nul $n$ et en posant $h = \dfrac{b-a}{n}$, on peut par exemple effectuer l'approximation suivante : $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \simeq \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$, où $x_k \in \left[a + \dfrac{k(b-a)}{n}, a + \dfrac{(k+1)(b-a)}{n}\right]$ (en pratique on prend habituellement $x_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$, soit la valeur à gauche de l'intervalle, ou $x_k = a + \dfrac{(k+1)(b-a)}{n}$, soit la valeur à droite).




**Définition 7.** Une **somme de Riemann de pas** $h$ pour la fonction $f$ sur le segment $[a,b]$ est une somme de la forme $S_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$, avec les mêmes notations que ci-dessus.

*Remarque* 9. On peut en fait définir des sommes de Riemann de pas non constant. Dans ce cas, la valeur du pas est le plus grand écart entre deux valeurs euccessives de la subdivision, comme pour les fonctions en escalier.

**Théorème 5.** Les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale de $f$ : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(x)\ dx$. De plus, si la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$, alors $|I - S_n(f)| \leqslant \dfrac{M(b-a)^2}{2n}$, où

$M = \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

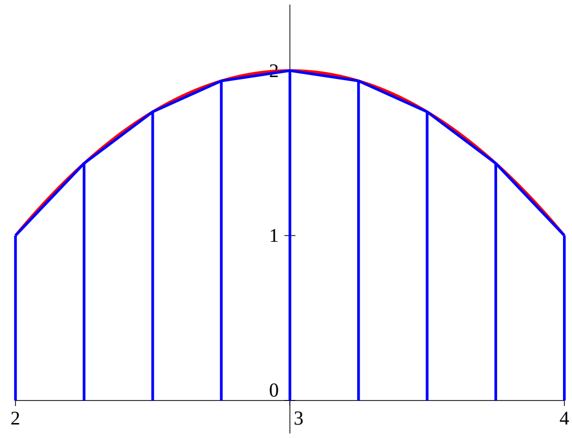
*Démonstration.* Nous ne prouverons le théorème que dans le cas où la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$. Posons $a_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$, et majorons l'erreur intervalle par intervalle : $\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\ dt - \frac{b-a}{n} f(x_k)\right| = \left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\ dt - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x_k)\ dt\right| \leqslant \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\ dt$. Or, la fonction $f$ ayant sa dérivée majorée en valeur absolue par $M$ sur $[a_k, a_{k+1}]$, l'inégalité des accroissements finis nous assure que $\forall t \in [a_k, a_{k+1}]$, $|f(t) - f(x_k)| \leqslant M|t - x_k| \leqslant M(t - a_k)$. On peut alors majorer notre erreur par $\int_{a_k}^{a_{k+1}} t - a_k\ dt = \left[\frac{t^2}{2} - a_k t\right]_{a_k}^{a_{k+1}} = \frac{a_{k+1}^2}{2} - a_k a_{k+1} - \frac{a_k^2}{2} + a_k^2 = \frac{a_{k+1}^2 - 2a_k a_{k+1} + a_k^2}{2} = \frac{(a_{k+1} - a_k)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{2n^2}$. L'erreur maximale commise sur $[a_k, a_{k+1}]$ est donc de $\frac{M(b-a)^2}{2n^2}$, et l'erreur totale commise sur l'intervalle $[a, b]$ vaut au maximum $n$ fois l'erreur précédente (puisque l'intervalle a été découpé en $n$ morceaux), soit $\frac{M(b-a)^2}{2n}$. On a bien prouvé que $|I - S_n(f)| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{2n}$, ce qui suffit à prouver la convergence de $S_n(f)$ vers $I$ puisque notre majorant tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$. □

*Remarque* 10. Les sommes de Riemann seront très souvent utilisées avec $a = 0$ et $b = 1$, et des valeurs de $x_k$ à gauche ou à droite pour chaque intervalle. On obtient alors la formulation simplifiée : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\ dx$.

**Exemple :** On utilise parfois les sommes de Riemann de façon indirecte pour trouver la limite de suites définies par des sommes, en utilisant leur convergence vers une intégrale qu'on sait calculer (c'est donc le processus complètement inverse de celui présenté dans cette partie de cours). Ainsi, si on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$, on peut écrire $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, où $f : x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$. D'après le théorème sur les sommes de Riemann, $\lim_{n \to +\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\ dx = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

## 3.2 Méthode des trapèzes

**Principe :** Comme dans le cas de la méthode des rectangles, on découpe l'intervalle d'intégration en $n$ segments de largeur $h = \frac{b-a}{n}$, mais sur chaque segment, on approche désormais l'intégrale par l'aire du trapèze passant par les deux points de la courbe d'abscisse $a_k$ et $a_{k+1}$. Autrement dit, on effectue l'approximation $I \simeq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2} = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right)$.




*Remarque* 11. La différence entre cette méthode et celle des trapèzes est extrêmement minime en termes de calculs, puisqu'il suffit de calculer $n+1$ valeurs de la fonction $f$ (au lieu de $n$) et calculer une somme (là encore avec une seule addition supplémentaire). Pourtant, comme nous allons le voir, l'erreur commise est nettement plus faible.

**Théorème 6.** En notant $T_n$ la valeur approchée de $I$ obtenue à l'aide de la méthode des trapèzes, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. De plus, si $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, alors $|I - T_n| \leqslant \dfrac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$, où $M_2 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

*Démonstration.* L'idée est la même que dans le cas de la méthode des trapèzes, mais on a besoin pour le calcul d'un équivalent de l'IAF faisant intervenir la dérivée seconde. Cet équivalent est donné par la formule de Taylor-Lagrange, qui permet de prouver que l'écart entre $f(x)$ et la valeur donnée par le trapèze est majoré par $(a_{k+1}-x)(x-a_k)\dfrac{M_2}{2}$ sur l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ (majoration plus simple à obtenir à l'aide de l'égalité de Taylor-Lagrange que de l'inégalité que je vous ai donnée). Comme dans la démonstration précédente, il suffit alors de calculer $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} (a_{k+1}-t)(t-a_k)\,dt = \int_{a_k}^{a_{k+1}} -t^2 + a_kt + a_{k+1}t - a_ka_{k+1}\,dt = \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{a_kt^2}{2} + \frac{a_{k+1}t^2}{2} - a_ka_{k+1}t\right]_{a_k}^{a_{k+1}} = -\frac{a_{k+1}^3}{3} + \frac{a_ka_{k+1}^2}{2} + \frac{a_{k+1}^3}{2} - a_ka_{k+1}^2 + \frac{a_k^3}{3} - \frac{a_k^3}{2} - \frac{a_{k+1}a_k^2}{2} + a_k^2a_{k+1} = \frac{a_{k+1}^3 - 3a_{k+1}^2a_k + 3a_k^2a_{k+1} - a_k^3}{6} = \frac{(a_{k+1}-a_k)^3}{6} = \frac{(b_a)^3}{6n^3}$. En découle une erreur sur $[a_k, a_{k+1}]$ inférieure à $\dfrac{M_2(b-a)^3}{12n^3}$. Comme précédemment, cette majoration sera multipliée par $n$ pour obtenir l'erreur maximale sur l'intervalle $[a,b]$ tout entier, qui vaut donc $\dfrac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$. □

### 3.3 Méthode de Simpson

**Principe :** La méthode des rectangles approchait la courbe par une constante sur chaque intervalle, la méthode des trapèzes par une fonction affine, l'étape logique suivante est d'approcher à l'aide d'un morceau de parabole, passant par les points d'abscisse $a_k$, $a_{k+1}$ et $\dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}$ (il faut trois points pour déterminer une parabole). Nous ne ferons pas les calculs, mais nous contenterons de donner la fomule d'approximation donnée par la méthode de Simpson : $I \simeq \dfrac{b-a}{6n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + 4f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) + f(a_{k+1})$. Cette méthode donnes des valeurs approchées de $I$ qui convergent encore plus rapidement que les deux méthodes précédentes. Pour s'en convaincre, un dernier petit calcul :

**Proposition 11.** Si $f$ est une fonction polynômiale de degré 2, la méthode de Simpson donne une valeur exacte de l'intégrale de $f$ (sans même avoir besoin de découper l'intervalle).

*Démonstration.* Contentons-nous de vérifier que cela fonctionne pour $f(x) = x^2$. Calculons donc $(b-a)\left(a^2+b^2+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right) = (b-a)(a^2+b^2+a^2+2ab+b^2) = 2(b-a)(a^2+b^2+ab) = 2(ba^2+b^3+ab^2-a^3-ab^2-a^2b) = 2(b^3-a^3)$. Cette valeur est bien égale à $6\int_a^b x^2\,dx = 6\times\frac{b^3-a^3}{3}$. $\square$

**Théorème 7.** En notant $Z_n$ la valeur approchée de $I$ obtenue à l'aide de la méthode de Simpson, $\lim_{n\to+\infty} Z_n = \int_a^b f(x)\,dx$. De plus, si $f$ est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$, alors $|I - Z_n| \leqslant \frac{M_4(b-a)^5}{180n^4}$, où $M_4 = \sup_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.