

# Chapitre 21 : Géométrie plane

PTSI B Lycée Eiffel

11 juin 2017

*Qu'est-ce qu'un ours cartésien ?*

*Un ours polaire ... après changement de coordonnées !*

## Introduction

Ce premier chapitre de géométrie sera consacré à rappeler les principales définitions et propriétés relatives à la géométrie analytique dans le plan. Autrement dit, nous travaillerons toujours avec des coordonnées. Nous en profiterons pour définir correctement le produit scalaire et le déterminant dans le plan. Nous ferons également un bilan de tout ce qu'il y a à savoir sur les deux types d'objets géométriques les plus simples et les plus couramment utilisés dans le plan : les droites et les cercles.

### Objectifs du chapitre :

- maîtrise de la géométrie vectorielle et analytique élémentaire.
- capacité à calculer et manipuler des équations d'objets simples, notamment à l'aide de déterminants et de produits scalaires.

## 1 Repérage dans le plan

### 1.1 Rappels sur les vecteurs

Nous ne chercherons absolument pas à donner ici une définition de la notion de vecteur, qui reviendrait à tenter la peu satisfaisante caractérisation d'un vecteur par les trois données que sont sa direction, son sens et sa norme, comme vous avez pu le voir au lycée. Pour l'instant, contentons-nous de garder notre vision intuitive de ce qu'est un vecteur : un objet mathématique caractérisant une translation, et concentrons-nous sur les opérations que nous connaissons les concernant.

**Définition 1.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs, et  $t$  et  $t'$  les translations correspondantes. Le vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  est le vecteur caractérisant la translation  $t' \circ t$ . Une autre façon de voir les choses en utilisant des points : si les trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  vérifient  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ , alors  $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$  (en effet,  $B = t(A)$  et  $C = t'(B)$  donc  $C = t' \circ t(A)$ ). C'est la fameuse **relation de Chasles**.

**Définition 2.** À tout vecteur  $\vec{u}$  et à tout réel  $\lambda$ , on peut associer un vecteur  $\lambda\vec{u}$ , de même direction de même sens si  $\lambda > 0$  et de sens opposé sinon, et de norme multipliée par  $|\lambda|$ . Ce produit est appelé **produit extérieur** d'un vecteur par un nombre réel.

**Définition 3.** L'ensemble de tous les vecteurs du plan, muni de ces deux opérations de somme et de produit extérieur, est un espace vectoriel réel. L'élément neutre pour la somme de vecteurs est le **vecteur nul**, noté  $\vec{0}$ .

*Remarque 1.* En termes de points, on aura  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ , et  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

**Définition 4.** Un vecteur est **unitaire** (ou **normé**) s'il a une norme égale à 1.

**Définition 5.** Deux vecteurs sont **colinéaires** s'ils forment un angle nul modulo  $\pi$ , ou si l'un des deux est nul. Ils sont **orthogonaux** s'ils forment un angle droit, c'est-à-dire un angle de  $\frac{\pi}{2}$  modulo  $\pi$ .

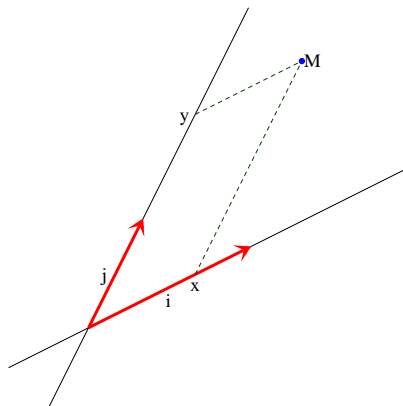
## 1.2 Repères cartésiens

**Définition 6.** Une **base** du plan est la donnée d'un couple de vecteurs  $(\vec{i}, \vec{j})$  non colinéaires. Un **repère** du plan est la donnée d'un triplet  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , où  $O$  est un point du plan et  $(\vec{i}, \vec{j})$  forment une base du plan. Le point  $O$  est alors appelé **origine** du repère, et les droites passant par  $O$  et dirigées par les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  **axes** du repère, usuellement notés  $(Ox)$  et  $(Oy)$ .

**Définition 7.** Une base  $(\vec{i}, \vec{j})$  (et les repères correspondants) est **orthogonale** si les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont orthogonaux. Elle est **orthonormale** si de plus  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ . Un repère orthonormal est **direct** si  $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})} = \frac{\pi}{2}$

**Théorème 1.** Soit  $(\vec{i}, \vec{j})$  une base du plan. Tout vecteur du plan peut s'écrire de façon unique sous la forme  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ , où  $x$  et  $y$  sont deux réels appelés **coordonnées** du vecteur  $\vec{u}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

**Définition 8.** Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan, et  $M$  un point du plan. Les **coordonnées** du point  $M$  sont les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ . On notera ces coordonnées sous la forme  $M(x; y)$ .



Dans ce repère, le point  $M$  a pour coordonnées  $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ .

*Remarque 2.* Cette dernière définition constitue en fait une identification entre l'ensemble des points du plan, l'ensemble des vecteurs du plan, et l'ensemble  $\mathbb{R}^2$  des couples de réels.

**Méthode :** Il existe évidemment énormément de repères dans le plan, et il faut être capable de passer d'un repère à l'autre. Plutôt que de vous donner des formules lourdes dans le cas général, je préfère vous expliquer la méthode, les calculs étant faciles à refaire. Considérons donc un point  $M$ , qui admet pour coordonnées  $(x, y)$  dans un premier repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , et dont on cherche à calculer les nouvelles coordonnées  $(x', y')$  dans un second repère  $(O', \vec{i}', \vec{j}')$ . Pour cela, il faudra bien entendu au préalable avoir exprimé les vecteurs de la seconde base dans la première :  $\vec{i}' = a\vec{i} + b\vec{j}$ , et  $\vec{j}' = c\vec{i} + d\vec{j}$ . On écrit alors  $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} = -x_{O'}\vec{i}' - y_{O'}\vec{j}' + x\vec{i} + y\vec{j} = (x - x_{O'})\vec{i}' + (y - y_{O'})\vec{j}'$ .

Comme par ailleurs on a par définition  $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' = ax'\vec{i} + bx'\vec{j} + cy'\vec{i} + dy'\vec{j} = (ax' + cy')\vec{i} + (bx' + dy')\vec{j}$ , on obtient les deux équations  $x - x_{O'} = ax' + cy'$  et  $y - y_{O'} = bx' + dy'$ . Reste un système à résoudre. Alternativement, on peut partir des coordonnées du point  $O$  dans le nouveau repère pour obtenir des formules donnant  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

**Exemple :** Considérons un premier repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et un second  $(O', \vec{i}', \vec{j}')$ , où  $O'$  a pour coordonnées  $(-1; 2)$  dans l'ancien repère, et  $\vec{i}' = \vec{i} + \vec{j}$ , et  $\vec{j}' = -\vec{i} + 3\vec{j}$ . On considère le point  $M$  ayant pour coordonnées  $(3, 3)$  dans le premier repère et on cherche ses coordonnées  $(x', y')$  dans le second. On écrit donc  $3\vec{i} + 3\vec{j} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = -\vec{i} + 2\vec{j} + x'\vec{i}' + y'\vec{j}' = -\vec{i} + 2\vec{j} + x'(\vec{i} + \vec{j}) + y'(-\vec{i} + 3\vec{j}) = (-1 + x' - y')\vec{i} + (2 + x' + 3y')\vec{j}$ . Par identification, on a donc les deux équations  $4 = x' + y'$  et  $1 = x' + 3y'$ . Une petite soustraction donne  $3 = -2y'$ , soit  $y' = -\frac{3}{2}$ , puis  $x' = 4 - y' = \frac{11}{2}$ . Les coordonnées cherchées sont donc  $(\frac{11}{2}, -\frac{3}{2})$ .

**Proposition 1.** Soient  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et  $(O', \vec{i}', \vec{j}')$  deux repères orthonormaux directs, et  $\theta = (\widehat{\vec{i}, \vec{i}'})$ , alors les coordonnées  $(x', y')$  d'un point  $M$  dans le nouveau repère sont en relation avec celles de l'ancien, notées  $(x, y)$ , via les formules :

$$\begin{cases} x - x_{O'} &= \cos(\theta)x' - \sin(\theta)y' \\ y - y_{O'} &= \sin(\theta)x' + \cos(\theta)y' \end{cases}$$

### 1.3 Répérage polaire

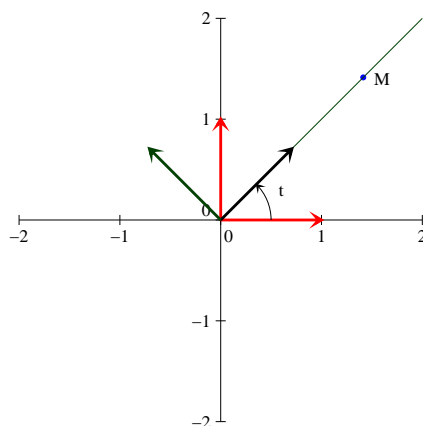
Le repérage polaire est une autre façon de décrire les points du plan à l'aide de deux réels, qui suppose un repère orthonormal direct déjà fixé. Si on veut se ramener aux notions vues sur les nombres complexes, le repérage cartésien (couple de coordonnées  $(x, y)$ ) correspond à l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique  $z = a + ib$ , alors que le repérage polaire sera l'équivalent de la forme exponentielle  $z = re^{i\theta}$ .

**Définition 9.** Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormal direct, et  $\theta \in \mathbb{R}$ . Le **repère polaire** associé au réel  $\theta$  est le repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ , où  $\vec{u}(\theta) = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$ , et  $\vec{v}(\theta) = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$ .

*Remarque 3.* Les vecteurs de base du repère polaire associé à l'angle  $\theta$  sont parfois notés  $\vec{u}_r$  (au lieu de  $\vec{u}(\theta)$ ) et  $\vec{u}_\theta$  (au lieu de  $\vec{v}(\theta)$ ). Le repère polaire associé à l'angle  $\theta$  correspond simplement à une rotation d'angle  $\theta$  du repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**Définition 10.** Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormal direct, et  $M$  un point du plan distinct de l'origine  $O$  du repère. Un **couple de coordonnées polaires** du point  $M$  est un couple de réels  $(r, \theta)$  tel que  $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}(\theta)$ , où  $\vec{u}(\theta)$  est le premier vecteur de la base du repère polaire associé à  $\theta$ . Un tel couple est unique si  $M \neq O$  si on impose de plus la condition  $r > 0$  (l'angle  $\theta$  est alors unique à  $2\pi$  près), mais le couple  $(-r, \theta + \pi)$  est également un couple de coordonnées polaires du point  $M$ .

*Remarque 4.* On peut convenir que n'importe quel couple de la forme  $(0, \theta)$  constitue un couple de coordonnées polaires de l'origine  $O$  du repère.



Sur ce schéma (où  $\theta$  est noté  $t$ ), le point  $M$  a pour coordonnées cartésiennes  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  et pour coordonnées polaires  $(2, \frac{\pi}{4})$  ou  $(-2, -\frac{3\pi}{4})$ . En vert, le repère polaire associé à l'angle  $\frac{\pi}{4}$

**Proposition 2.** Si un point  $M$  admet pour coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ , et pour coordonnées polaires  $(r, \theta)$  dans un même repère, alors  $x = r \cos(\theta)$  et  $y = r \sin(\theta)$ . Dans l'autre sens,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$  conviennent (quand cela a un sens et plus ou moins  $\pi$  pour avoir un angle dans le bon quart du cercle trigonométrique).

*Démonstration.* C'est quasi évident vu la définition des coordonnées polaires et du repère polaire associé à  $\theta$  :  $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}(\theta) = r(\cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{j}) = r \cos(\theta) \vec{i} + r \sin(\theta) \vec{j}$ . Les formules dans l'autre sens doivent évidemment vous rappeler des souvenirs, cela correspond naturellement au calcul du module et de l'argument d'un nombre complexe. Elles découlent des précédentes :  $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} = r$ , et  $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{r \sin(\theta)}{r \cos(\theta)}\right) = \arctan(\tan(\theta)) = \theta$  si  $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ . □

**Exemple :** Les calculs de coordonnées polaires sont essentiellement identiques à ceux de forme exponentielle d'un nombre complexe (au choix possible d'un « module » négatif près). Par exemple, un couple de coordonnées polaires du point  $(2, 2)$  sera  $(2\sqrt{2}; \frac{\pi}{4})$ . Ce même point aura également pour coordonnées polaires  $(-2\sqrt{2}; \frac{-3\pi}{4})$ .

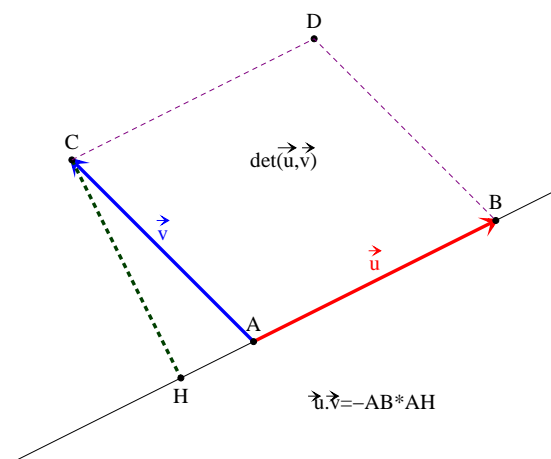
## 2 Produit scalaire et déterminant

### 2.1 Produit scalaire

**Définition 11.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls du plan, le **produit scalaire** de ces deux vecteurs, noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , est le réel  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ . Si l'un des deux vecteurs est nul, le produit scalaire est nul.

*Remarque 5.* Rappelons que  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ . On peut ainsi développer des carrés scalaires de sommes ou de différence comme des identités remarquables, par exemple  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

*Remarque 6.* On peut donner une interprétation géométrique du produit scalaire en termes de projection : si  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$  et  $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ , en notant  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur la droite  $(AB)$ , on peut écrire  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$  ( $\overline{AB}$  désignant la mesure algébrique du segment  $[AB]$ , qui est égale à sa distance au signe près, deux segments de même direction mais de sens opposé ayant des mesures algébriques de signe opposés).



**Proposition 3.** Deux vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de nos définitions : le produit scalaire est nul si et seulement si le cosinus de l'angle formé par les deux vecteurs est nul, ce qui se produit si cet angle est égal à  $\frac{\pi}{2}[\pi]$ , exactement la définition que nous avons donné pour l'orthogonalité.  $\square$

**Proposition 4.** Propriétés du produit scalaire

Le produit scalaire est :

- bilinéaire :  $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v} + \mu \vec{u} \cdot \vec{w}$  et  $(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{w} + \mu \vec{v} \cdot \vec{w}$ .
- symétrique :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ .
- défini positif :  $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ , et  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ .

*Démonstration.*

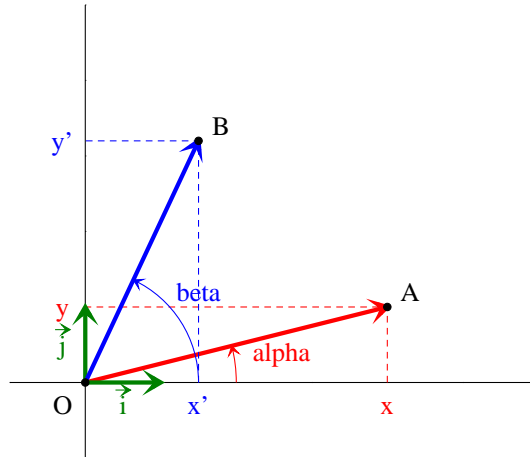
- La bilinéarité est pénible à vérifier avec notre définition du produit scalaire, alors qu'elle est très facile avec l'expression dans une base orthonormée :  $x(\lambda x' + \mu x'') + y(\lambda y' + \mu y'') = \lambda(xx' + yy') + \mu(xx'' + yy'')$  (la deuxième partie découle de la symétrie).
- Il suffit de constater que  $\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) = \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ , ce qui découle de la parité du cosinus.
- C'est une conséquence immédiate du fait que  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ .

$\square$

**Proposition 5.** Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont pour coordonnées respectives  $(x, y)$  et  $(x', y')$  dans un repère orthonormal, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ .

*Démonstration.* Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  le repère orthonormal dans lequel on connaît nos coordonnées. Notons A et B les points tels que  $\vec{OA} = \vec{u}$  et  $\vec{OB} = \vec{v}$ , et notons  $\alpha = (\vec{i}, \vec{OA})$  et  $\beta = (\vec{i}, \vec{OB})$ .

On peut alors écrire  $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB \times \cos(\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}}) = OA \times OB \times \cos(\beta - \alpha) = OA \times OB \times (\cos(\beta)\cos(\alpha) + \sin(\beta)\sin(\alpha))$ . Or,  $x = OA \cos(\alpha)$ ,  $y = OA \sin(\alpha)$ ;  $x' = OB \cos(\beta)$  et  $y' = OB \sin(\beta)$ . On obtient donc  $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB \times \left( \frac{x}{OA} \times \frac{x'}{OB} + \frac{y}{OA} \times \frac{y'}{OB} \right) = xx' + yy'$ .  $\square$



## 2.2 Déterminant

**Définition 12.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan, leur **déterminant** est le nombre réel  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u} \ \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ .

*Remarque 7.* Avec les mêmes notations que pour le produit scalaire, on peut interpréter le déterminant comme  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = AB \times CH$  (au signe près). Plus intéressant, le déterminant représente l'aire algébrique du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  (aire du parallélogramme  $ABDC$  dans la figure tracée pour le produit scalaire).

**Proposition 6.** Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ .

*Démonstration.* Comme pour le déterminant, c'est une conséquence immédiate de nos définitions.  $\square$

**Proposition 7.** Propriétés du déterminant

Le déterminant est :

- bilinéaire :  $\det(\vec{u}, \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}) + \mu \det(\vec{u}, \vec{w})$  et  $\det(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \vec{w}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{w}) + \mu \det(\vec{v}, \vec{w})$ .
- antisymétrique :  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$ .

*Démonstration.* La bilinéarité est à nouveau facile à prouver une fois connue l'expression en base orthonormale, et l'antisymétrie découle de l'imparité du sinus.  $\square$

**Proposition 8.** Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont pour coordonnées respectives  $(x, y)$  et  $(x', y')$  dans un repère orthonormal direct, alors  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$ .

*Démonstration.* En reprenant les notations de la démonstration effectuée dans le cas du produit scalaire,  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = OA \times OB \times \sin(\beta - \alpha) = OA \times OB \times (\cos(\beta) \sin(\alpha) - \sin(\beta) \cos(\alpha)) = OA \times OB \times \left( \frac{y'}{OA} \times \frac{x}{OB} - \frac{x'}{OA} \times \frac{y}{OB} \right) = xy' - x'y$ .  $\square$

**Exemple :** On peut calculer très rapidement des aires à l'aide du déterminant. Si on place dans un repère orthonormal les points  $A(-1, 1)$ ,  $B(2, 3)$  et  $C(-4, 6)$ , l'aire du triangle  $ABC$  est donnée par  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(15 + 6) = \frac{21}{2}$ .

### 3 Droites et cercles

#### 3.1 Équations de droites

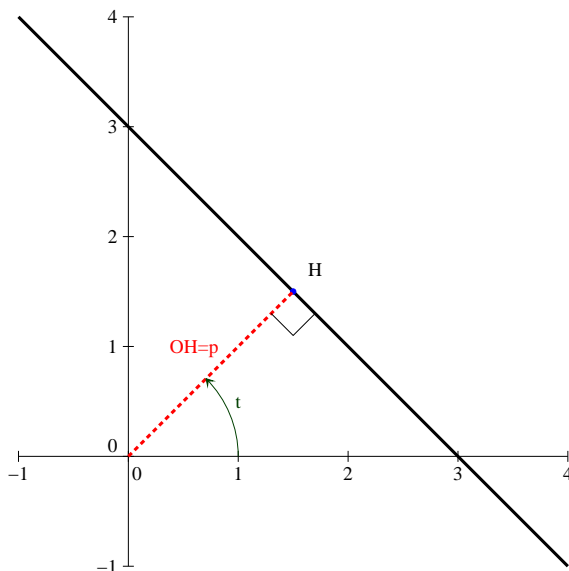
**Proposition 9.** Équations cartésiennes de droite

Une équation du type  $ax + by + c = 0$ , où  $a, b$  et  $c$  sont trois réels tels que  $(a, b) \neq (0, 0)$ , est l'équation cartésienne d'une droite. Réciproquement, toute droite du plan admet une équation de cette forme.

*Remarque 8.* Une telle équation n'est pas unique, si on multiplie les trois coefficients  $a, b$  et  $c$  par une même constante non nulle  $k$ , on trouve une nouvelle équation de la même droite.

**Proposition 10.** Toute droite  $(d)$  du plan admet une équation de la forme  $x \cos(\theta) + y \sin(\theta) = p$ , où  $(p, \theta)$  représente un couple de coordonnées polaires du projeté orthogonal  $H$  de l'origine  $O$  du repère sur la droite  $(d)$ . Une telle équation est appelée **équation normale** de la droite  $(d)$ .

*Démonstration.* En effet, un point  $M(x, y)$  appartient à la droite  $(d)$  si et seulement si  $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{OH} = 0$ , c'est-à-dire si  $(x - p \cos(\theta))p \cos(\theta) + (y - p \sin(\theta))p \sin(\theta) = 0$ , ce qui donne en développant  $xp \cos(\theta) + yp \sin(\theta) = p^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = p^2$ . Il suffit alors de tout diviser par  $p$  pour obtenir l'équation normale (on vérifie sans mal que l'équation reste valable si  $p = 0$ ).  $\square$



*Remarque 9.* Pour passer d'une équation cartésienne  $ax + by + c = 0$  à une équation normale, il suffit de diviser tous les coefficients par  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . On obtient alors une équation  $a'x + b'y + c' = 0$ , avec  $\sqrt{a'^2 + b'^2} = 1$ . On peut donc écrire  $a' = \cos(\theta)$  et  $b' = \sin(\theta)$  puisque le point  $(a', b')$  correspond à un point du cercle trigonométrique.

**Définition 13.** Un **vecteur directeur** d'une droite  $(d)$  du plan est un vecteur colinéaire à tout vecteur de la forme  $\overrightarrow{AB}$ , où  $A$  et  $B$  sont deux points appartenant à la droite  $(d)$ . Un **vecteur normal** à la droite  $(d)$  est un vecteur orthogonal à tout vecteur directeur de la droite  $(d)$ .

*Remarque 10.* Si le vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(a, b)$  dans un repère orthonormal est un vecteur directeur non nul de la droite  $(d)$ , alors  $\vec{v}(-b, a)$  est un vecteur normal à cette même droite, puisque  $\vec{v} \cdot \vec{u} = -ab + ba = 0$ .

**Proposition 11.** Soit  $(d)$  une droite du plan passant par le point  $A(x_A, y_A)$  et admettant le vecteur  $\vec{n}(a, b)$  pour vecteur normal, alors l'équation  $a(x - x_A) + b(y - y_A)$  est une équation cartésienne de la droite  $(d)$ .

*Démonstration.* En effet, un point  $M(x, y)$  appartient à la droite  $(d)$  si et seulement si  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ , soit  $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$ .  $\square$

**Exemple :** On peut de même utiliser le déterminant pour obtenir une équation de droite à partir d'un vecteur directeur. Soit  $(d)$  la droite passant par  $A(-1, 2)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(-3, 4)$ . Un point  $M(x, y)$  appartient à la droite  $(d)$  si et seulement si  $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$ , soit  $4(x+1) + 3(y-2) = 0$ , ce qui donne l'équation cartésienne  $4x + 3y - 2 = 0$ . On procède de la même manière si la droite est définie par deux de ses points  $A$  et  $B$ , le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  étant alors un vecteur directeur de la droite. Ces méthodes restent valables même si on ne se trouve pas dans un repère orthonormal, l'expression  $xy' - x'y$  continuant alors à caractériser la colinéarité des vecteurs de coordonnées  $(x, y)$  et  $(x', y')$ .

**Définition 14.** La droite  $(d)$  passant par le point  $A(x_A, y_A)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(a, b)$  peut être décrite par le **système d'équations paramétriques**  $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases}$ , où  $t \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* En effet, un point  $M(x, y)$  appartient à  $(d)$  si et seulement si  $\overrightarrow{AM}$  est colinéaire à  $\vec{u}$ , ce qu'on peut traduire par l'existence d'un réel  $t$  pour lequel  $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ . Cela donne les deux équations  $x - x_A = ta$  et  $y - y_A = tb$ , dont découlent les formules.  $\square$

**Proposition 12.** Distance d'un point à une droite (hors programme).

Soit  $M(x_M, y_M)$  un point du plan, et  $(d)$  une droite. La distance de  $M$  à la droite  $(d)$  peut être donnée par une des quatre formules suivantes :

- Si  $\vec{u}$  est un vecteur directeur de  $(d)$ , alors  $d(M, d) = \frac{|\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u})|}{\|\vec{u}\|}$ .
- Si  $\vec{n}$  est un vecteur normal à  $(d)$ , alors  $d(M, d) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ .
- Si la droite a pour équation cartésienne  $ax + by + c = 0$ , alors  $d(M, d) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .
- Si la droite a pour équation normale  $x \cos(\theta) + y \sin(\theta) = p$ , alors  $d(M, d) = |x_M \cos(\theta) + y_M \sin(\theta) - p|$ .

*Démonstration.*

- Il faut revenir à l'interprétation géométrique du déterminant :  $|\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u})| = \|\vec{u}\| \times MH$ , où  $H$  est le projeté orthogonal du point  $M$  sur la droite  $(d)$ . La distance  $MH$  étant égale à celle de  $M$  à  $(d)$ , la formule en découle.
- C'est exactement comme ci-dessus, le produit scalaire avec un vecteur normal est (au signe près) égal à  $\|\vec{n}\| \times MH$ .
- Quitte à tout diviser par  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , on trouve une équation normale de la droite, et on se ramène au cas suivant.
- Le vecteur  $\vec{n}(\cos(\theta), \sin(\theta))$  est un vecteur normal à  $(d)$  normé, et le point  $A(p \cos(\theta), p \sin(\theta))$  appartient à la droite, donc en reprenant la deuxième formule démontrée,  $d(M, d) = |\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = |(x_M - p \cos(\theta)) \cos(\theta) + (y_M - p \sin(\theta)) \sin(\theta)| = |x_M \cos(\theta) + y_M \sin(\theta) - p(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))| = |x_M \cos(\theta) + y_M \sin(\theta) - p|$ .  $\square$

**Exemple :** Soit  $M(3, 5)$  et  $(d)$  la droite d'équation cartésienne  $2x - 3y + 1 = 0$ , alors  $d(M, d) = \frac{|6 - 15 + 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{8}{\sqrt{13}}$ . Les formules précédentes étant désormais hors programme, il faudra en fait être capables de les redémontrer, ou plutôt de calculer à la main les coordonnées du projeté orthogonal  $H$  du point  $M$  sur la droite  $(d)$  (la distance de  $M$  à  $(d)$  étant alors simplement la norme du vecteur  $\overrightarrow{MH}$ ). C'est en fait très simple : le point  $H$  appartient à la droite  $(d)$  (première équation linéaire) et le vecteur  $\overrightarrow{MH}$  est orthogonal à  $(d)$  (deuxième équation linéaire), on obtient les coordonnées de  $H$  en résolvant un système de deux équations à deux inconnues.



### 3.2 Équations de cercles

**Définition 15.** Équation cartésienne de cercle.

Dans un repère orthonormal, le cercle de centre  $A(a, b)$  et de rayon  $R$  admet pour **équation cartésienne**  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ . Réciproquement, toute équation de la forme  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by - c = 0$  avec  $a^2 + b^2 + c \geq 0$  est une équation de cercle de centre  $A(a, b)$  et de rayon  $R = \sqrt{c + a^2 + b^2}$ .

**Exemple :** On peut factoriser l'équation  $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 14 = 0$  sous la forme  $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 4$ , où on reconnaît le cercle de centre  $A(-4, 1)$  et de rayon 2.

**Proposition 13.** Le cercle de diamètre  $[AB]$  admet pour équation  $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$

*Démonstration.* Cela revient à dire qu'un point  $M$  appartient au cercle de diamètre  $[AB]$  si et seulement si  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ , une propriété que vous connaissez bien depuis votre collège. Démonstrons-là à coup de propriétés du produit scalaire, en introduisant le point  $I$ , milieu du segment  $[AB]$  et donc centre du cercle de diamètre  $[AB]$ . On peut alors écrire  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$ . Or,  $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$ , donc  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$ . Le produit scalaire est donc nul si et seulement si  $MI = IA$ , ce qui indique bien que  $M$  appartient au cercle de centre  $I$  et de rayon  $IA$ , autrement dit au cercle de diamètre  $[AB]$ .  $\square$

**Définition 16.** Le cercle de centre  $A(a, b)$  et de rayon  $R$  peut être décrit dans un repère orthonormal par le **système d'équations paramétriques**  $\begin{cases} x = a + R \cos(t) \\ y = b + R \sin(t) \end{cases}$ , où  $t \in ]-\pi, \pi]$  (on peut aussi prendre  $t \in \mathbb{R}$ , on parcourra simplement plusieurs fois le cercle).

*Remarque 11.* On reconnaît, à une homothétie de rapport  $R$  et à une translation de vecteur de coordonnées  $(a, b)$  près, le classique paramétrage du cercle trigonométrique :  $x = \cos(\theta)$  et  $y = \sin(\theta)$ .

**Proposition 14.** Soit  $(C)$  un cercle de centre  $A$  et de rayon  $R$  et  $(d)$  une droite du plan. Alors :

- si  $d(A, d) > R$ ,  $C$  et  $(d)$  ne se coupent pas.
- si  $d(A, d) = R$ ,  $C$  et  $(d)$  se coupent en un point unique, on dit que la droite  $(d)$  est **tangente** au cercle  $C$ .
- si  $d(A, d) < R$ ,  $C$  et  $(d)$  ont deux points d'intersection distincts.

**Exemple :** Soit  $C$  le cercle de centre  $A(-1, 2)$  et de rayon 5, et  $(d)$  la droite d'équation  $2x + y - 2 = 0$ .

On peut commencer par calculer  $d(A, d) = \frac{|-2 + 2 - 2|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} < 5$  pour constater que  $C$  et  $(d)$

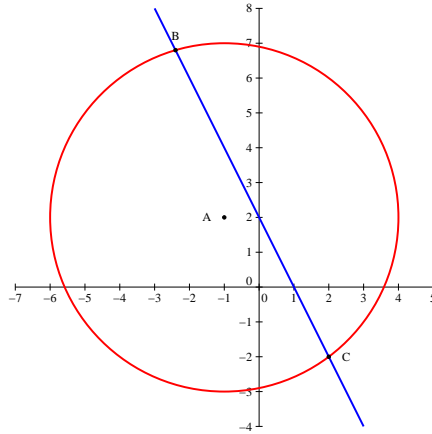
ont deux points d'intersection. Pour les déterminer on peut simplement exprimer  $y$  en fonction de  $x$  dans l'équation de la droite :  $y = 2 - 2x$ , et injecter cette expression dans l'équation du cercle :

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$  donne alors  $(x + 1)^2 + (-2x)^2 = 25$ , soit  $x^2 + 2x + 1 + 4x^2 = 25$ , donc  $5x^2 + 2x - 24 = 0$ . Cette équation du second degré a pour discriminant  $\Delta = 4 + 480 = 484 = 22^2$ ,

et admet donc deux racines  $x_1 = \frac{-2 - 22}{10} = -\frac{12}{5}$  et  $x_2 = \frac{-2 + 22}{10} = 2$ . On trouve les valeurs

correspondantes des ordonnées  $y_1 = 2 - 2x_1 = \frac{34}{5}$ , et  $y_2 = 2 - 2x_2 = -2$ . Le cercle et la droite se

coupent donc en  $B\left(-\frac{12}{5}, \frac{34}{5}\right)$ , et en  $C(2, -2)$ .

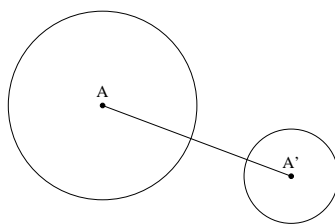


**Proposition 15.** Soit  $\mathcal{C}$  le cercle d'équation  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by - c = 0$ , et  $M_0(x_0, y_0)$  un point de  $\mathcal{C}$ , alors une équation de la tangente en  $M$  à  $\mathcal{C}$  est  $xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) - c = 0$ .

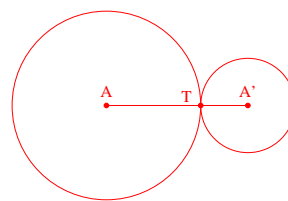
*Démonstration.* Un point  $M(x, y)$  appartient à la tangente en  $M_0$  à  $\mathcal{C}$  si  $\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{AM_0} = 0$ , soit  $(x - x_0)(x_0 - a) + (y - y_0)(y_0 - b) = 0$ . En développant,  $xx_0 + yy_0 - ax - by + ax_0 + by_0 - x_0^2 - y_0^2 = 0$ . Mais comme le point  $M_0$  est sur le cercle, il vérifie l'équation  $x_0^2 + y_0^2 = 2ax_0 + 2by_0 + c$ , donc on retrouve la condition  $xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) - c = 0$ .  $\square$

**Proposition 16.** Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux cercles du plan, de centres respectifs  $A$  et  $A'$  et de rayons respectifs  $R$  et  $R'$ . Alors :

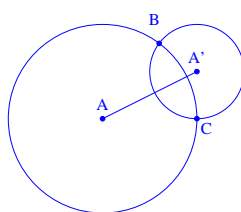
- si  $AA' > R + R'$ , les deux cercles ne se coupent pas.
- si  $AA' = R + R'$ , les deux cercles sont tangents extérieurement, ils ont un unique point commun.
- si  $|R - R'| < AA' < R + R'$ , les deux cercles se coupent en deux points distincts.
- si  $AA' = |R - R'|$ , les deux cercles sont tangents intérieurement, ils ont un unique point commun.
- si  $AA' < |R - R'|$ , les deux cercles ne se coupent pas.



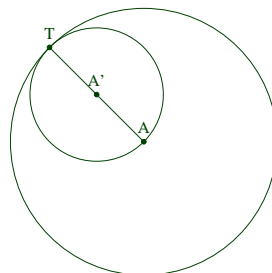
$AA' > R + R'$



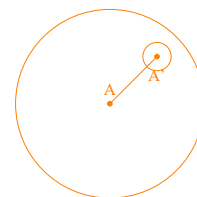
$AA' = R + R'$



$|R - R'| < AA' < R + R'$



$AA' = |R - R'|$



$AA' < |R - R'|$