Feuille d'exercices n°14 : Espaces vectoriels

PTSI B Lycée Eiffel

14 mars 2017

Vrai-Faux

1. Un sous-ensemble d'un espace vectoriel E qui est stable par somme et par produit par un réel est un sous-espace vectoriel de E.
2. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace E est toujours un sous-espace vectoriel de E.
3. Une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n est libre si et seulement si elle est génératrice.
4. Deux sous-espaces F et G d'un même espace E sont supplémentaires si $F \cap G = \{0\}$ et $F \cup G = E$.
5. Les espaces vectoriels classiques $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont de dimension n.

Exercice 1 (*)

On se place dans l'ensemble E des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (il s'agit bien d'un espace vectoriel). Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E ?

- fonctions paires
- fonctions admettant un minimum global
- fonctions s'annulant une infinité de fois sur $\mathbb{R}$
- fonctions vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x^2)$
- fonctions admettant une tangente horizontale en $x = 5$
- fonctions vérifiant $f''(x) = 3f'(x) - 2f(x)$
- fonctions admettant en $+\infty$ une asymptote (horizontale ou oblique) ou une branche parabolique (de direction (Ox) ou (Oy))

Exercice 2 (*)

Parmi tous les sous-ensembles suivants de $E = \mathbb{R}_3[X]$, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels, donner leur dimension qinsi qu'une base pour chacun d'eux.

1. $\{P \in E \mid P(2) = 0\}$
2. $\{P \in E \mid P(0) = 2\}$
3. $\{P \in E \mid P + P'' = 0\}$
4. $\{P \in E \mid P \in \mathbb{R}_1[X]\}$
5. $\{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$
6. $\{P \in E \mid \int_0^2 P(x)\ dx = 0\}$
7. $\{P \in E \mid \int_0^2 P(x)\ dx = 0 \text{ et } P(1) = 0\}$
8. $\{P \in E \mid P(1) = P'(1) = 0\}$
9. $\{P \in E \mid P(X+1) = 2P(X)\}$

Exercice 3 (**)

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille $\mathcal{F}$ est une base de E, et déterminer si possible les coordonnées de x dans $\mathcal{F}$.

1. $E = \mathbb{R}^3$; $\mathcal{F} = ((-1,1,1);(1,-1,1);(1,1,-1))$ et $x = (2,3,4)$.
2. $E = \mathbb{R}_3[X]$; $\mathcal{F} = (1; X; X(X-1); X(X-1)(X-2))$ et $x = X^3$.
3. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} \right)$ et $x = I_4$.
4. $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \geqslant 4,\ u_n = 0\}$; $x = (-2,3,4,1,0,0,\dots)$ (vous avez le choix pour $\mathcal{F}$!).

Exercice 4 (*)

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les deux sous-ensembles $F = \{(x,y,z) \mid 2x + y - 3z = 0\}$ et $G = \{(2a+b, a-b, 3a-b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer qu'il s'agit de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, et déterminer leur intersection $F \cap G$.

Exercice 5 (*)

On considére les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble des matrices M s'écrivant sous la forme $M = aI + bJ + cK + dL$, avec a, b, c, $d \in \mathbb{R}^4$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel, et que (I, J, K, L) en forme une base.
2. Montrer, en les calculant explicitement, que J^2, K^2, L^2, J^3 et L^3 appartiennent à E.
3. En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E.
4. Établir enfin que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E.

Exercice 6 (***)

Dans chacun des cas suivants, montrer que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, et qu'ils sont supplémentaires.

- $E = \mathbb{R}^2$; $F = \{(x,y) \mid x + y = 0\}$ et $G = \{(x,y) \mid x - y = 0\}$.
- $E = \mathbb{R}^3$; $F = \{(x,y,z) \mid x - y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((3,2,1))$.
- $E = \mathbb{R}_2[X]$; $F = \mathrm{Vect}(X, X^2)$ et $G = \{P \mid P' = 0\}$.
- $E = \mathbb{R}_6[X]$; $F = \{P \in E \mid P$ est une fonction paire$\}$ et $G = \{P \in E \mid P$ est une fonction impaire$\}$.
- $E = \mathcal{C}_0([-1;1], \mathbb{R})$; $F = \{f \in E \mid \int_{-1}^{1} f(t)\, dt = 0\}$ et $G = \{$fonctions constantes$\}$.
- $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{R}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0\}$; $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + u_n = 0\}$ et $G = \{(u_n)_{n \in \mathbb{R}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0\}$.

Exercice 7 (**)

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère la famille $\mathcal{F} = ((1,2,0,1);(2,1,3,-1);(4,5,3,1))$.

1. Déterminer si la famille $\mathcal{F}$ est libre, et donner une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
2. Décrire $\mathcal{F}$ comme ensemble des solutions d'un système d'équations à déterminer.

3. On note G l'ensemble des solutions du système $\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & & & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$. Déterminer une base de G, ainsi que sa dimension.
4. Montrer que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \oplus G$. Déterminer la décomposition dans $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \oplus G$ du vecteur $(6, 10, 8, 2)$.

Exercice 8 (*)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont on précisera une base et la dimension.
2. Même question pour $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

Exercice 9 (***)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace E de dimension finie, qui vérifient $\dim(F) = \dim(G)$.

1. Montrer que $F \cap G$ admet un supplémentaire F' dans F et un supplémentaire G' dans G qui sont de même dimension.
2. Montrer que F' et G' ont une intersection réduite au vecteur nul.
3. En considérant des bases de F' et G', construire un supplémentaire commun à F et G dans $F + G$.
4. Montrer qu'il existe un supplémentaire commun à F et G dans E.

Exercice 10 (***)

On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{S}$ le sous-espace constitué des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui constitué des matrices antisymétriques.

1. Donner la dimension de $\mathcal{S}$ et celle de $\mathcal{A}$, ainsi qu'une base de chacun de ces sous-espaces.
2. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices de trace nulle. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donner sa dimension, ainsi qu'une base.
3. On note désormais M l'ensemble des matrices dont la somme des coefficients sur chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est la même. Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Déterminer la dimension et une base de M.
5. Déterminer la dimension de $\mathrm{M} \cap \mathcal{S}$, donner un exemple de matrice symétrique appartenant à M, dont le coefficient sur la première ligne, première colonne vaut 1.
6. Déterminer la dimension de $\mathrm{M} \cap \mathcal{A}$, donner un exemple de matrice antisymétrique appartenant à M, dont le coefficient sur la première ligne, troisième colonne vaut 1.
7. Montrer qu'il n'existe qu'une seule matrice dans M dont la première ligne est constituée des nombres 1, 2 et 3 (dans cet ordre), et donner cette matrice.

Exercice 11 (***)

On note dans tout cet exercice $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1. Déterminer un polynôme $P_1 \in E$ vérifiant les trois conditions suivantes : $P_1(1) = 1$, $P_1(3) = 0$ et $P_1(5) = 0$ (méthode au choix, on n'est pas obligé d'utiliser les polynômes de Lagrange).
2. Déterminer de même un polynôme P_3 vérifiant $P_3(1) = P_3(5) = 0$ et $P_3(3) = 1$, ainsi qu'un polynôme P_5 tel que $P_5(1) = P_5(3) = 0$ et $P_5(5) = 1$.

3. Démontrer que la famille (P_1, P_3, P_5) est une famille libre dans E.
4. Expliquer, si possible sans refaire de calculs, pourquoi cette famille est en fait une base de E.
5. Déterminer les coordonnées du polynôme $Q = X^2 - 3X - 1$ dans cette base.
6. Calculer $Q(1)$, $Q(3)$ et $Q(5)$, les résultats sont-ils cohérents avec ce que vous avez obtenu à la question précédente ?
7. On note désormais $P_0 = (X-1)(X-3)(X-5)$ et, pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{R}[X]$, on note $f(P)$ le reste de la division euclidienne de P par P_0.
   (a) Calculer $f(X^5)$.
   (b) Expliquer pourquoi $f(P)$ appartient toujours à E. L'application f est donc définie sur $\mathbb{R}[X]$ et à valeurs dans E.
   (c) Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X]$ pour lesquels $f(P) = 0$ (aucun calcul nécessaire).
   (d) Démontrer que, $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = P(1)P_1 + P(3)P_3 + P(5)P_5$.

Problème (***)

Ce problème ne fait intervenir que très peu les espaces vectoriels (ou de façon cachée), il aurait autant eu sa place dans le chapitre précédent, puisque son but est d'étudier l'efficacité de la méthode de Simpson pour le calcul approché d'intégrales. Pour toute fonction f continue sur le segment $[-1,1]$, on pose $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$, et $S(f) = \dfrac{f(-1)+4f(0)+f(1)}{3}$ (ce qui correspond au calcul de la méthode de Simpson sans faire de découpage de l'intervalle en n morceaux).

1. Un peu de calcul pour débuter : calculer les valeurs de $I(f)$ et de $S(f)$ dans les cas suivants :
   - f est une fonction impaire.
   - $f(t) = t^4$.
   - $f(t) = \dfrac{1}{t+2}$.
   - $f(t) = \dfrac{1}{t^2+2t+3}$.
2. On continue avec du calcul : vérifier que $I(f) = S(f)$ si $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ ou $f(x) = x^3$ (on pourra utiliser certains des calculs précédents pour abréger dans certains cas). En déduire que l'égalité reste vraie pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
3. On revient au cas général et on suppose désormais que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[-1,1]$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P_f \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P_f(-1) = f(-1)$, $P_f(0) = f(0)$, $P_f(1) = f(1)$ et $P_f'(0) = f'(0)$. Exprimer les coefficients de P_f en fonction de $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$ et $f'(0)$.
4. On considère un réel $\alpha \in]0,1[$, et on pose $h(x) = f(x) - P_f(x) - kx^2(x^2-1)$, où k est une constante réelle fixée telle que $h(\alpha) = 0$.
   (a) Vérifier que $h'(0) = 0$.
   (b) Pour quelles valeurs de x peut-on affirmer que $h(x) = 0$?
   (c) Montrer que h' s'annule en quatre points distincts de l'intervalle $[-1,1]$ (on pourra utiliser les questions précédentes et appliquer intelligemment le théorème de Rolle).
   (d) En déduire, à l'aide du théorème de Rolle, que $h^{(4)}$ s'annule en un certain point $\beta \in [-1,1]$, et prouver que $k = \dfrac{f^{(4)}(\beta)}{4!}$.
   (e) Montrer que $|f(\alpha) - P_f(\alpha)| \leqslant \dfrac{M_4}{4!}\alpha^2(1-\alpha^2)$, où M_4 est la valeur maximale prise par $|f^{(4)}|$ sur $[-1,1]$.
5. Déduire du résultat précédent que, $\forall t \in [0,1]$, $|f(t) - P_f(t)| \leqslant \dfrac{M_4}{4!}t^2(1-t^2)$. On admet que le résultat reste vrai sur $[-1,0]$.
6. En intégrant le résultat précédent, prouver que $|I(f) - S(f)| \leqslant \dfrac{M_4}{90}$.
7. Comparer $|I(f) - S(f)|$ avec $\dfrac{M_4}{90}$ dans le cas où $f(t) = t^4$. En déduire que la majoration précédente ne peut pas être améliorée.