

TD n°8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

11 mai 2017

Exercice 1

1. L'application f va de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, il n'y a qu'à prouver qu'elle est linéaire. Si $u(x, y, z)$ et $v(x', y', z')$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^3$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda u + v) = (\lambda x + x' - \lambda y - y' + \lambda z + z', -\lambda x - x' + 3\lambda y + 3y' - 2\lambda z - 2z', -2\lambda x - 2x' + 6\lambda y + 6y' - 4\lambda z - 4z') = \lambda(x - y + z, -x + 3y - 2z, -2x + 6y - 4z) + (x' - y' + z', -x' + 3y' - 2z', -2x' + 6y' - 4z') = \lambda f(u) + f(v)$. Notre application est bien un endomorphisme.
2. Il faut résoudre le système
$$\begin{cases} x & - & y & + & z & = & 0 \\ -x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ -2x & + & 6y & - & 4z & = & 0 \end{cases}$$
. Les deux dernières équations de ce système sont équivalentes, on garde donc simplement les conditions $y = x + z$, puis en remplaçant dans la deuxième équation $-x + 3x + 3z - 2z = 0$, soit $z = -2x$. On en déduit que $\ker(f) = \{(x, -x, -2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, -1, -2))$. La famille constituée de l'unique vecteur $(1, -1, -2)$ est une base de $\ker(f)$.
3. On vient de voir que $\ker(f)$ était de dimension 1, le théorème du rang assure alors que $\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - 1 = 2$. Par ailleurs, on sait que $\text{im}(f)$ est engendré par les images des vecteurs de la base canonique, soit $\text{im}(f) = \text{Vect}((1, -1, -2), (-1, 3, 6), (1, -2, -4))$. Connaissant déjà la dimension de $\text{im}(f)$, on sait qu'il doit y avoir une relation entre ces trois vecteurs. On peut par exemple constater que $(1, -1, -2) - (-1, 3, 6) = (2, -4, -8) = 2 \times (1, -2, -4)$ (on peut bien sûr écrire un système pour trouver ces coefficients). On peut donc écrire $\text{im}(f) = \text{Vect}((1, -1, -2), (-1, 3, 6))$. Les deux vecteurs restants dans notre famille forment une base de $\text{im}(f)$.
4. Manifestement, $(1, -1, -2) \in \text{im}(f)$, donc $\text{Vect}((1, -1, -2)) \subset \text{im}(f)$ (qui est un espace vectoriel), c'est-à-dire que $\ker(f) \subset \text{im}(f)$. Ces deux espaces ne peuvent être égaux puisqu'ils n'ont pas la même dimension.
5. On calcule $v = f(u) = (-1, 3, 6)$, puis $w = f(-1, 3, 6) = (-2, -2, 4)$. La famille (u, v, w) étant constituée de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, il suffit de prouver qu'elle est génératrice pour prouver qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^3$ (on peut bien sûr aussi prouver qu'elle est libre, mais les calculs effectués ici vont servir à nouveau juste après). Soit donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on cherche à écrire $(x, y, z) = au + bv + cw$, ce qui revient à résoudre le système
$$\begin{cases} -b - 2c = x \\ a + 3b - 2c = y \\ 6b + 4c = z \end{cases}$$
. L'opération $2L_1 + L_3$ donne $4b = 2x + z$, soit $b = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}z$. On en déduit $c = \frac{1}{4}z - \frac{3}{2}b = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{8}z$, et enfin $a = y - 3b + 2c = -3x + y - z$. Le système a toujours une solution, notre famille est bien génératrice, et donc une base, de $\mathbb{R}^3$.
6. Il suffit de reprendre les calculs précédents, en fixant successivement $x = 1$, puis $y = 1$ et $z = 1$ (et les autres coordonnées nulles à chaque fois). On obtient ainsi $(1, 0, 0) = \left(-3, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)_B$; $(0, 1, 0) = (1, 0, 0)_B$ (ça, ce n'est pas une surprise, puisqu'il s'agit du vecteur u), et $(0, 0, 1) = \left(-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)_B$.

7. On constate sans trop se fatiguer que $f(w) = 0$, donc $f^3(u) = 0$. Mais alors $f^3(v) = f(f^2(u)) = 0$, et $f^3(w) = f^2(0) = 0$. L'application f^3 s'annule donc sur les trois vecteurs de la base $\mathcal{B}$, il s'agit nécessairement de l'application nulle.
8. On peut composer : $g^2 = (f + 3\text{id})^2 = f^2 + 6f + 9\text{id}$, puis $g^3 = (f + 3\text{id})^3 = f^3 + 9f^2 + 27f + 27\text{id} = 9f^2 + 27f + 27\text{id}$ puisque $f^3 = 0$. Plus généralement, on peut appliquer la formule du binôme de Newton : $g^k = (3\text{id} + f)^k = 3^k\text{id} + n3^{n-1}f + \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2}f^2$ (les termes suivants s'annulent tous).
9. On constate que $g^3 = 9f^2 + 27f + 27\text{id} = 9(f^2 + 6f + 9\text{id}) - 27f - 54\text{id} = 9g^2 - 27(f + 2\text{id}) = 9g^2 - 27g + 27\text{id}$. On a donc $g^3 - 9g^2 + 27g = -27\text{id}$, ou encore $-\frac{1}{27}g^3 + \frac{1}{3}g^2 - g = \text{id}$. On peut factoriser à gauche par g pour obtenir $g \circ \left(-\frac{1}{27}g^2 + \frac{1}{3}g - \text{id}\right) = \text{id}$, ce qui prouve que g est un automorphisme, donc la réciproque est $g^{-1} = -\frac{1}{27}g^2 + \frac{1}{3}g - \text{id}$.

Exercice 2

1. L'application est certainement à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et $f(\lambda M + N) = \frac{\lambda a + a' + \lambda d + d'}{2}I + \frac{\lambda b + b' + \lambda c + c'}{2}J = \lambda f(M) + f(N)$ avec les notations évidentes.
2. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $f(M) = \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix}$. Le noyau de f est donc constitué des matrices vérifiant $a + d = b + c = 0$, soit les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$. Autrement dit, $\ker(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Puisque ce noyau est de dimension 2, le théorème du rang nous assure que l'image de f sera aussi de dimension 2. Or, $\text{im}(f) \subset \text{Vect}(I, J)$, puisque $f(M)$ est par définition une combinaison linéaire des matrices I et J . On a donc nécessairement $\text{im}(f) = \text{Vect}(I, J)$ (qui est de dimension 2).
3. On a $M \in \ker(f - \text{id}) \Leftrightarrow f(M) = M$, ce qui donne ici les équations $\frac{a+d}{2} = a$ et $\frac{b+c}{2} = b$, soit $d = a$ et $c = b$. On retrouve exactement la même famille génératrice (I, J) que celle obtenue pour $\text{im}(f)$, les deux espaces sont donc égaux.
4. Les coefficients diagonaux de $f(f(M))$ sont tous deux égaux à $\frac{\frac{a+d}{2} + \frac{a+d}{2}}{2} = \frac{a+d}{2}$, et les deux autres à $\frac{\frac{b+c}{2} + \frac{b+c}{2}}{2} = \frac{b+c}{2}$. Ceci prouve que $f(f(M)) = f(M)$, donc que $f^2 = f$ et que f est un projecteur.
5. On sait que $s = 2f - \text{id}$, donc $s(M) = 2f(M) - M = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$.

Exercice 3

1. La fonction $\arctan$ étant impaire, $f(-x) = \frac{-(x^2 + 1)\arctan(x)}{-x} = f(x)$, donc f est paire.
2. On sait que $\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$, donc $f(x) = \frac{1}{x}(x^2 + 1) \left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right) = 1 - \frac{1}{3}x^2 + x^2 + o(x^3) = 1 + \frac{2}{3}x^2 + o(x^3)$.
3. La fonction f admettant un développement limité à l'ordre 1 en 0, elle y est prolongeable par continuité et dérivable. De plus $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, donc la tangente en 0 est horizontale.

d'équation $y = 1$. Enfin, $f(x) - 1 \sim \frac{2}{3}x^2$ est positif au voisinage de 0, donc la courbe sera au-dessus de sa tangente dans un voisinage de 0.

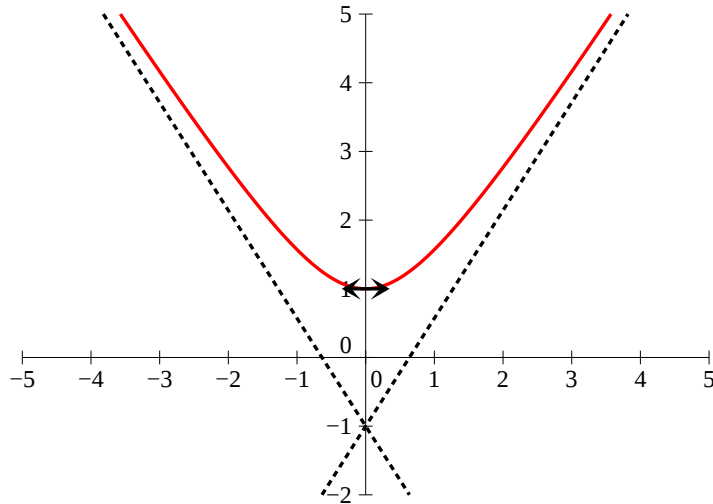
4. C'est un calcul très classique, on pose par exemple $g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$. La fonction g est donc constante, et prend par exemple comme valeur $g(1) = 2\arctan(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

5. Commençons comme toujours par poser $X = \frac{1}{x}$, de façon à ce que X tende vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On a alors $f(X) = \frac{(\frac{1}{X^2} + 1)\arctan(\frac{1}{X})}{\frac{1}{X}} = \frac{(1+X^2)(\frac{\pi}{2} - \arctan(X))}{X}$ en utilisant la question précédente. On peut faire notre développement limité : $f(X) = \frac{1}{X}(1+X^2)\left(\frac{\pi}{2} - X + \frac{1}{3}X^3 + o(X^3)\right) = \frac{\pi}{2X} + \frac{\pi}{2}X - 1 - X^2 + \frac{1}{3}X^2 + o(X^2) = \frac{\pi}{2X} - 1 + \frac{\pi}{2}X - \frac{2}{3}X^2 + o(X^2)$, soit $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2}x - 1 + \frac{\pi}{2x} - \frac{2}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. On observe bien la présence d'une asymptote oblique d'équation $y = \frac{\pi}{2}x - 1$, et $f(x) - \left(\frac{\pi}{2}x - 1\right) \sim \frac{\pi}{2x}$ est positif au voisinage de $+\infty$, la courbe de f sera donc au-dessus de son asymptote dans un tel voisinage. En $-\infty$, le calcul précédent n'est plus directement valable car la formule de la question précédente ne marche que pour des valeurs strictement positives de x , mais on peut simplement utiliser la parité de f : on aura une asymptote oblique d'équation $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$, et la courbe sera également au-dessus de cette asymptote sur un voisinage de $-\infty$.

6. La fonction h est définie et dérivable sur $[0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. On calcule $h'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(x^2 - 1)^2 - (x^2 + 1)^2}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)^2} = -\frac{4x^2}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)^2}$. Cette dérivée est toujours négative. La fonction h est donc strictement décroissante sur chacun de ses deux intervalles de définition. On a par ailleurs $h(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = -\infty$ (calcul sans difficulté), $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{\pi}{2}$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
h	0	$+\infty$	$\frac{\pi}{2}$

7. Calculons donc la dérivée de la fonction f , qui est sûrement dérivable sur $\mathbb{R}^+$: $f'(x) = \frac{2x^2 \arctan(x) + x - (x^2 + 1)\arctan(x)}{x^2} = \frac{(x^2 - 1)\arctan(x) + x}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}h(x)$. La fonction h est négative sur $[0, 1[$ et positive sur $]1, +\infty[$, et $x^2 - 1$ également. Du coup, $f'(x)$ est positif sur chacun des deux intervalles, et f est donc croissante.
8. On n'oublie pas les asymptotes et le fait que la fonction est paire :



Exercice 4

- Aucune des fonction f_k ne peut être définie en 0 et en 4, valeurs pour lesquelles le $\ln$ du dénominateur n'est pas définie. La seule condition supplémentaire pouvant créer des valeurs interdites est l'annulation du dénominateur. Si $k = 0$, on doit avoir $\ln \left| \frac{x}{x-4} \right| \neq 0$, donc $|x| \neq |x-4|$. Or, $|x| = |x-4|$ se produit si $x = x-4$, ce qui est impossible, ou $x = 4-x$, soit $x = 2$. On en déduit que $\mathcal{D}_{f_0} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2, 4\}$. Si $k \neq 0$, on doit cette fois résoudre l'équation $\ln \left| \frac{x}{x-4} \right| = -k$, soit $\frac{x}{x-4} = \pm e^{-k}$. On trouve donc $x = e^{-k}x - 4e^{-k}$, soit $x = \frac{4e^{-k}}{e^{-k}-1} = \frac{4}{1-e^k}$, ou $x = 4e^{-k} - xe^{-k}$, donc $x = \frac{4e^{-k}}{1+e^{-k}} = \frac{4}{e^k+1}$. Conclusion : $\mathcal{D}_{f_k} = \mathbb{R} \setminus \left\{ 0, 4, \frac{4}{1-e^k}, \frac{4}{1+e^k} \right\}$. Reste à classer les valeurs dans l'ordre : si $k > 0$, $e^k > 1$, donc $\frac{4}{1-e^k} < 0$, et $0 < \frac{4}{1+e^k} < 4$, donc on a dans ce cas $\frac{4}{1-e^k} < 0 < \frac{4}{1+e^k} < 4$. Au contraire, si $k < 0$, on aura $e^k < 1$, donc $\frac{4}{1-e^k} > 4$, et toujours $0 < \frac{4}{1+e^k} < 4$. Dans ce cas, $0 < \frac{4}{1+e^k} < 4 < \frac{4}{1-e^k}$.
- En 0 comme en 4, le dénominateur de f_k tend vers 0 (puisque le logarithme a une limite infinie dans les deux cas), et le numérateur tend au choix vers 0 ou 4, ce qui n'a guère d'influence : $\lim_{x \rightarrow 0} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow 4} f_k(x) = 0$. On peut effectivement prolonger par continuité en posant $f_k(0) = f_k(4) = 0$. Le taux d'accroissement de f en 0 est alors donné par $\tau_0(h) = \frac{f_k(h)}{h} = \frac{4}{k + \ln \left| \frac{x}{x-4} \right|}$, dont on vient de voir qu'il avait une limite nulle en 0. La fonction f_k est donc dérivable en 0 et sa courbe y admettra une tangente horizontale. Le taux d'accroissement de f_k en 4 peut s'écrire $\tau_4(h) = \frac{4x}{k(x-4) + (x-4) \ln |x| - (x-4) \ln |x-4|}$. Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow 4} (x-4) \ln |x-4| = 0$. Les autres termes du dénominateur tendent aussi clairement vers 0, donc $\lim_{x \rightarrow 4} \tau_4(h) = \pm \infty$. La fonction n'est pas dérivable en 4 (on ne va pas s'embêter à chercher le signe des limites infinies, elles découleront de l'étude des variations de f_k).
- Commençons par constater que $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{x-4} = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} k + \ln \left| \frac{x}{x-4} \right| = k$. Les limites en

$\pm\infty$ seront toujours infinies, et leur signe dépend de celui de k . Si $k = 0$, on aura $\frac{x}{x-4} > 1$ au voisinage de $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = +\infty$ (et inversement en $-\infty$). Les limites de f aux valeurs interdites autres que 0 et 4 sont toutes infinies puisque par définition le dénominateur y tend vers 0 mais pas le numérateur. Pour déterminer leur signe, il faut étudier $d_k(x) = k + \ln \left| \frac{x}{x-4} \right|$. On peut dériver : $d'_k(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-4} = \frac{4}{x(x-4)}$. La fonction d_k est donc décroissante sur $] -\infty, 0[$ et $]4, +\infty[$, et croissante sur $]0, 4[$. Sachant qu'elle s'annule en $\frac{4}{1+e^k} = \alpha$ et en $\frac{4}{1+e^k} = \beta$ et connaissant les positions de ces valeurs par rapport à 0 et 4, on peut distinguer les cas suivants :

- si $k > 0$, $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f_k(x) = -\infty$ (le numérateur est négatif, et le dénominateur aussi), $\lim_{x \rightarrow \beta^+} f_k(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f_k(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f_k(x) = +\infty$.
- si $k < 0$, $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f_k(x) = -\infty$ (le numérateur est positif, et le dénominateur négatif), $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f_k(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f_k(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \beta^+} f_k(x) = -\infty$.
- si $k = 0$, il n'y a que la valeur 2 à regarder, et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f_0(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f_0(x) = +\infty$.

4. Posons donc $X = \frac{1}{x}$, et calculons $f_0(X) = \frac{4}{X \ln \left| \frac{1/X}{1/X - 4} \right|} = \frac{4}{-X \ln(1 - 4X)}$ (on peut enlever

les valeurs absolues, X tend vers 0 quand on se rapproche de $+\infty$). On peut maintenant utiliser les développements limités : $f(X) = -\frac{4}{X(-4X - 8X^2 - \frac{64}{3}X^3 - 64X^4 + o(X^4))} = \frac{1}{X^2} \times \frac{1}{1 + 2X + \frac{16}{3}X^2 + 16X^3 + o(X^3)} = \frac{1}{X^2} \times \left(1 - 2X - \frac{16}{3}X^2 - 16X^3 + 4X^2 + \frac{64}{3}X^3 - 8X^3 + o(X^3) \right) = \frac{1}{X^2} - \frac{2}{X} - \frac{4}{3} - \frac{8}{3}X + o(X)$, soit $f(x) = x^2 - 2x - \frac{4}{3} - \frac{8}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

5. On fait le même genre de calcul dans le cas général, mais en plus barbare :

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \frac{4}{X(k - \ln(1 - 4X))} = \frac{4}{kX(1 + \frac{4}{k}X + \frac{8}{k}X^2 + \frac{64}{3k}X^3 + o(X^3))} \\ &= \frac{4}{kX} \left(1 - \frac{4}{k}X - \frac{8}{k}X^2 - \frac{64}{3k}X^3 + \frac{16}{k^2}X^2 + \frac{64}{k^2}X^3 - \frac{64}{k^3}X^3 + o(X^3) \right) \\ &= \frac{4}{kX} - \frac{16}{k^2} + \frac{32(2-k)}{k^3}X - \frac{256(k^2 - 2k + 3)}{3k^4}X^2 + o(X^2). \end{aligned}$$

Lorsque $k \neq 2$, le dernier terme est inutile. La droite d'équation $y = \frac{4}{k}x - \frac{16}{k^2}$ est toujours asymptote oblique à la courbe, et la position relative dépend du signe de $\frac{2-k}{k}$. La courbe est donc localement au-dessus de l'asymptote si $k < 0$ ou $k > 2$, en-dessous si $k = 1$. Dans le cas particulier où $k = 2$, la droite d'équation $y = 2x - 4$ est asymptote oblique à la courbe, et le terme non nul suivant du développement est $-\frac{16}{x^2}$, la courbe est donc en-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

6. On calcule simplement $f'_k(x) = \frac{4}{k + \ln \left| \frac{x}{x-4} \right|} - \frac{4x(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-4})}{(k + \ln \left| \frac{x}{x-4} \right|)^2}$

$$= \frac{4}{(k + \ln \left| \frac{x}{x-4} \right|)^2} \left(k + \ln \left| \frac{x}{x-4} \right| - 1 + \frac{x}{x-4} \right),$$

ce qui donne bien l'expression souhaitée en regroupant $\frac{x}{x-4} - 1 = \frac{4}{x-4}$.

7. Dérivons la fonction g_k pour obtenir $g'_k(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-4} - \frac{4}{(x-4)^2} = \frac{(x-4)^2 - x(x-4) - 4x}{x(x-4)^2} =$

$\frac{x^2 - 8x + 16 - x^2 + 4x - 4x}{x(x-4)^2} = \frac{8(2-x)}{x(x-4)^2}$. On calcule sans problème $g_k(2) = k - 2$, et les limites aux différentes bornes ne posent pas de problème. On peut alors dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
g_k	k $\searrow$ $-\infty$		$-\infty \nearrow k-2 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow k$	

8. Si $k = 0$, la fonction g_k ne s'annule pas, et f'_k non plus, ce qui donne un tableau qui ressemble à ceci :

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
f_0	$+\infty \searrow 0 \searrow -\infty$			$+\infty \searrow 0 \nearrow +\infty$	

Si $k = 2$, g_k s'annule pour $x = 2$, et pour une autre valeur x_0 qui est strictement inférieure à la valeur notée α plus haut dans l'énoncé (on peut calculer $g(\alpha)$ pour le vérifier), ce qui donne :

x	$-\infty$	x_0	α	0	β	2	4	$+\infty$
f_2	$-\infty \nearrow f(x_0) \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 0 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 4 \searrow 0 \nearrow +\infty$			

Enfin, si $k > 2$, ça devient carrément affreux puisque g_k s'annule trois fois, en une première valeur $x_0 < \alpha$, une deuxième x_1 comprise entre β et 2, et une dernière x_2 comprise entre 2 et 4 :

x	$-\infty$	x_0	α	0	β	x_1	2	x_2	4	$+\infty$
f_k	$-\infty \nearrow f(x_0) \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 0 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow f(x_1) \nearrow \frac{8}{k} \nearrow f(x_2) \searrow 0 \nearrow +\infty$					

9. Voilà à quoi ça ressemble :

