TD n°8 : révisions pour le DS8

PTSI B Lycée Eiffel

11 mai 2017

Exercice 1

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = (x-y+z, -x+3y-2z, -2x+6y-4z)$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau de f (on en donnera une base).
3. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, et en donner une base.
4. Montrer que $\ker(f) \subset \mathrm{Im}(f)$. Cette inclusion est-elle une égalité ?
5. On pose $u = (0,1,0)$, $v = f(u)$ et $w = f(v)$. Calculer v et w, et vérifier que $\mathcal{B} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Donner les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$.
7. Montrer que $f^3 = 0$ (on pourra utiliser la base $\mathcal{B}$, ou faire des calculs barbares, au choix).
8. On pose $g = f + 3\,\mathrm{id}$. Exprimer g^2, g^3 puis plus généralement g^k (pour un entier naturel k) en fonction de id, f et f^2.
9. Montrer que g est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer g^{-1} (quasiment aucun calcul nécessaire).

Exercice 2

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note f l'application qui, à une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, associe $f(M) = \dfrac{a+d}{2} I + \dfrac{b+c}{2} J$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base du noyau et de l'image de l'application f.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \ker(f - \mathrm{id})$.
4. Montrer que f est un projecteur.
5. Déterminer l'expression de la symétrie s par rapport à $\mathrm{Im}(f)$ et parallèlement à $\ker(f)$.

Exercice 3

On souhaite étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x^2+1)\arctan(x)}{x}$. On notera $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. Rappeler le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction arctangente, et en déduire celui de f.
3. En déduire que f est prolongeable par continuité et dérivable en 0. Donner l'équation de sa tangente en 0, ainsi que la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de cette tangente au voisinage de 0.
4. Montrer que, $\forall x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
5. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$, donner son équation ainsi que la position relative de la courbe et de l'asymptote (on utilisera le résultat de la question précédente et on fera un développement asymptotique). Que se passe-t-il en $-\infty$?
6. On pose $h(x) = \arctan(x) + \dfrac{x}{x^2-1}$. Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}^{+*}$.
7. En déduire les variations de la fonction f.
8. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 4

Pour tout entier relatif k, on note $f_k(x) = \dfrac{4x}{k + \ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right|}$. On notera $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f_0, puis celui de la fonction f_k (lorsque $k \neq 0$). On précisera bien l'ordre dans lequel sont placées les différentes valeurs interdites.
2. Montrer qu'on peut prolonger f_k par continuité en 0 et en 4. Ces prolongements sont-ils dérivables ?
3. Étudier les limites de f_k aux autres bornes de son domaine de définition.
4. Donner un développement asymptotique de f_0 en $+\infty$ de la forme
$f(x) = x^2 + ax + b + \dfrac{c}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
5. Montrer que, si $k \neq 0$, la courbe $\mathcal{C}_k$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique dont on donnera une équation, et dont on précisera la position relative par rapport à $\mathcal{C}_k$.
6. On pose $g_k(x) = \ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right| + k + \dfrac{4}{x-4}$. Vérifier que $g_k(x) = \dfrac{1}{4}\left(k + \ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right|\right)^2 f_k'(x)$.
7. Étudier les variations de la fonction g_k.
8. En déduire les tableaux de variation de la fonction f_k dans chacun des cas suivants : $k > 2$, $k = 2$, $k = 0$ (on ne cherchera pas à calculer toutes les valeurs intervenant dans ces tableaux).
9. Tracer une allure de la courbe $\mathcal{C}_2$.