TD n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

2 février 2017

Problème

I. Une première étude de fonction

1. La fonction i est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$, et $i'(x) = 2x + 1 - 2x\ln(x) - x = x + 1 - 2x\ln(x)$; $i''(x) = 1 - 2\ln(x) - 2 = -1 - 2\ln(x)$.
2. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} i(x) = 2$. La fonction est donc prolongeable par continuité en posant $i(0) = -2$. De plus, un calcul similaire donne $\lim\limits_{x\to 0} i'(x) = 1$. Le théorème de prolongement de la dérivée permet alors d'affirmer que i est dérivable en 0, et que $i'(0) = 1$.
3. La dérivée seconde $i''(x) = -1 - 2\ln(x)$ s'annule lorsque $\ln(x) = -\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire pour $x = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Comme $i\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{\sqrt{e}} - 2 - \dfrac{1}{e} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2e} + \dfrac{1}{\sqrt{e}} - 2$, et $i'\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{e}} + 1 - \dfrac{2}{\sqrt{e}} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{e}} + 1$, l'équation de la tangente en ce point a pour équation $y = \left(\dfrac{2}{\sqrt{e}} + 1\right)\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) + \dfrac{3}{2e} + \dfrac{1}{\sqrt{e}} - 2$ (on peut développer si on le souhaite, mais ça ne se simplifie pas vraiment).
4. L'étude du signe de i'' permet d'obtenir le tableau de variations suivant pour i' :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
i'	1 ↗	$\frac{2}{\sqrt{e}} + 1$	↘ $-\infty$

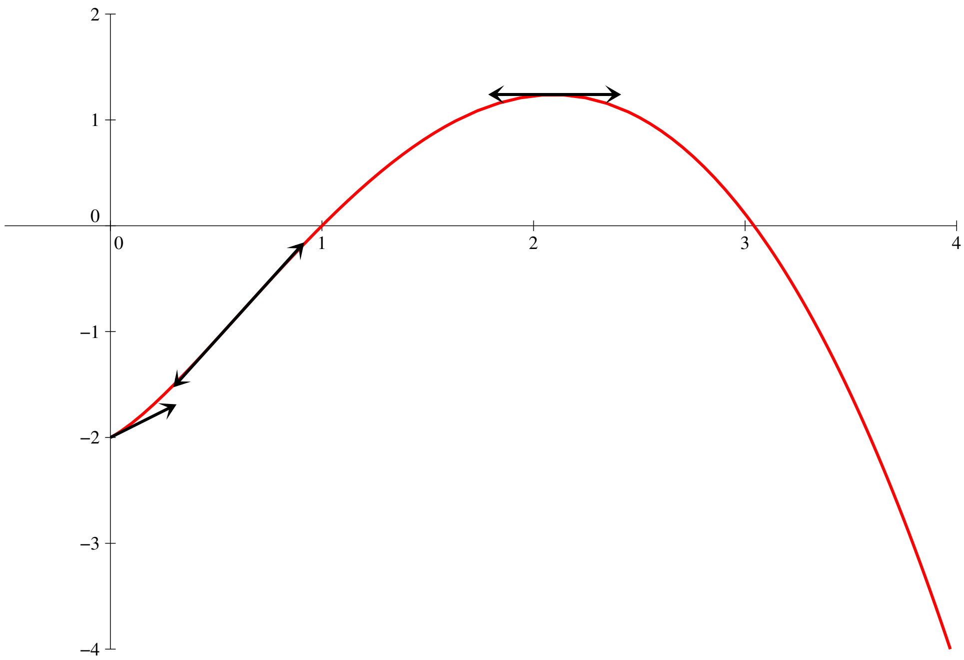
En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} i'(x) = -\infty$ (en factorisant par x par exemple). La fonction i' est donc strictement positive sur $\left[0; \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$, et effectue ensuite une bijection de $\left[\dfrac{1}{e}; +\infty\right[$ sur $\left]-\infty; \dfrac{2}{\sqrt{e}} + 1\right]$. En particulier, il existe un unique $\alpha \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right[$ tel que $i'(\alpha) = 0$. Comme par ailleurs $i'(1) = 2 > 0$, et que i' est strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right[$, on a bien $\alpha > 1$.

5. On déduit du signe de i' le tableau de variations de i :

x	0	1	α	$+\infty$
i	-2 ↗	0 ↗	$i(\alpha)$	↘ $-\infty$

En effet, $i(0) = 1 + 1 - 2 - 0 = 0$, et comme $i(x) \underset{+\infty}{\sim} -x^2\ln(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = -\infty$. Comme $\alpha > 1$, on en déduit que $i(\alpha) > 0$, et en exploitant la bijectivité de i de $[\alpha; +\infty[$ sur $]-\infty; \alpha]$, on obtient l'existence d'un unique $\beta \in [\alpha; +\infty[$ tel que $i(\beta) = 0$.

6. Pour tracer l'allure sur votre copie, puisqu'on donne $\alpha \simeq 2$, vous pouvez calculer une valeur approchée du maximum : $i(\alpha) \simeq i(2) \simeq 4 - 4\ln(2) \simeq 1,2$. Il faut bien entendu que la courbe coupe l'axe des abscisses en 1 et en $\beta \simeq 3$, il faut placer la tangente de pente 1 au point de départ $(0; -2)$ de la courbe, et placer la tangente au point d'inflexion en utilisant que $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0,6$; $i\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) \simeq -0,85$ et $i'\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) \simeq 2,2$. On obtient une courbe de ce type :



II. Une deuxième étude de fonction

1. Avec un $\ln(x)$ au dénominateur de la fraction, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. Mais en utilisant la limite classique $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, on trouve $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-1}{\ln(x)} = \lim\limits_{x-1\to0} \dfrac{x-1}{\ln(1+(x-1))} = 1$. On trouve alors $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x+2}{x} = 3$, et on peut en effet prolonger la fonction par continuité en posant $f(1) = 3$.

2. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x) = 0^-$, et $\lim\limits_{x\to0} (x+2)(x-1) = -2$, donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$. Par ailleurs, en factorisant par x et en invoquant la croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. La fonction f est dérivable partout sauf éventuellement en 1 comme quotient de fonctions usuelles, et $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x\ln(x)) - (\ln(x)+1)(x^2+x-2)}{(x\ln(x))^2} = \dfrac{x^2\ln(x) + 2\ln(x) - x^2 - x + 2}{(x\ln(x))^2} = \dfrac{x^2+2}{(x\ln(x))^2} \times g(x)$. Comme $\dfrac{x^2+2}{(x\ln(x))^2}$ est toujours strictement positif, f' est bien du signe de g.

4. Réécrivons le numérateur, en posant pour simplifier $X = x - 1$ (qui tendra donc vers 0) : $x^2\ln(x) + 2\ln(x) - x^2 - x + 2 = (X+1)^2\left(X - \dfrac{1}{2}X^2 + X^2\varepsilon(X)\right) + 2\left(X - \dfrac{1}{2}X^2 + X^2\varepsilon(X)\right) - X(X-3)$. On peut tout développer en regroupant tous les termes en X^2 sous la forme d'un $X^2\varepsilon(X)$ (évidemment, ce n'est plus la même fonction ε mais peu importe) : $X - \dfrac{1}{2}X^2 + 2X^2 +$

$2X - X^2 - X^2 + 3X + X^2\varepsilon(X) = -\dfrac{1}{2}X^2 + \varepsilon(X)$. Quand on divise par le dénominateur qui est de la forme $X(X - \dfrac{1}{2}X^2 + X^2\varepsilon(X)) = X^2 + X^2\alpha(X)$ (avec α qui tend vers 0, cette fois-ci j'ai changé le nom), on trouve facilement que $f(x) = \dfrac{-\frac{1}{2} + \varepsilon(X)}{1 + \alpha(X)}$ qui tend vers $-\dfrac{1}{2}$, donc la fonction est dérivable en 1 (théorème du prolongement de la dérivée), et $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$.

5. La fonction g est $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{(2x+1)(x^2+2) - 2x(x^2+x-2)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2x^3 + x^2 + 4x + 2 - 2x^3 - 2x^2 + 4x}{(x^2+2)^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2 - 8x - 2}{(x^2+2)^2} = \dfrac{(x^2+2)^2 + x(x^2 - 8x - 2)}{x(x^2+2)^2} = \dfrac{x^4 + 4x^2 + 4 - x^3 - 8x^2 - 2x}{x(x^2+2)^2} = \dfrac{h(x)}{x(x^2+2)^2}$. Le dénominateur de cette fraction étant toujours positif sur $]0; +\infty[$, g' est bien du signe de h.

6. En effet, $h(1) = 1+1-4-2+4 = 0$ et $h(-2) = 16-8-4\times 8+4+4 = 0$. On peut donc factoriser h sous la forme $h(x) = (x-1)(x+2)(ax^2+bx+c) = (x^2+x-2)(ax^2+bx+c)$. On doit donc avoir, en développant, $ax^4 + (a+b)x^3 + (c+b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$. Par identification, on obtient les conditions $a = 1$; $a + b = 1$; $c + b - 2a = -2$; $c - 2b = -2$ et $-2c = 4$, ce qui donne la solution unique $a = 1$; $b = 0$ et $c = -2$. Autrement dit, $h(x) = (x-1)(x+2)(x^2-2)$. On peut alors dresser le tableau de signe de h sur $]0; +\infty[$, et le tableau de variations de g sur ce même intervalle :

x	0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$h(x)$	4	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$g(\sqrt{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour remplir ce tableau, on a calculé $g(1) = 0 - \dfrac{0}{3} = 0$; constaté que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2} = -1$, donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$; et que $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

7. La lecture du tableau de variations (on invoquera à nouveau le théorème de la bijection pour être très rigoureux) permet en effet de constater que g s'annule une deuxième fois sur l'intervalle $[\sqrt{2}; +\infty[$. Comme g est négative sur $]0; \lambda]$ et positive sur $[\lambda; +\infty[$, on a le tableau de variations suivant pour f :

x	0		λ		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$\simeq 2,9$	$\nearrow$	$+\infty$