TD n°5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

8 janvier 2015

Exercice 1

1. La fonction f est définie si $x \neq 0$, et si $\ln(|x|) \neq 0$, soit $x \neq \pm 1$. Autrement dit, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}$. Ce domaine de définition est symétrique par rapport par 0, et $f(x) = \dfrac{1}{-x\ln(|-x|)} = -\dfrac{1}{x\ln(|x|)}$, la fonction f est donc impaire. On peut restreindre son étude à l'ensemble $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, et la courbe représentative de f sera symétrique par rapport à l'origine du repère.
2. Puisque la valeur absolue ne s'annule pas sur le domaine de définition de f, $x \mapsto \ln(|x|)$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée de fonctions dérivables, et f elle-même est ausi dérivable comme inverse et produit de fonction dérivables. Contentons-nous de considérer f sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, donc de prendre la forme $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$ pour calculer la dérivée $f'(x) = -\dfrac{\ln(x) + 1}{x^2\ln^2(x)}$, qui est de signe opposé à celui de $\ln(x) + 1$. La dérivée est donc positive sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right[$, et négative sur $\left]\dfrac{1}{e}, 1\right[$ et sur $]1, +\infty[$. Concernant les limites, on a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ par croissance comparée, et $x\ln(x) < 0$ à droite de 0 donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée ici), $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ (aucune difficulté ici non plus). Dernière valeur à donner avant de dresser le tableau de variations : $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = -e$. On obtient le reste du tableau en utilisant l'imparité de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{e}$		0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
f	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	e	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

3. La fonction f étant impaire, on peut se contenter de résoudre l'équation quand $x > 0$ (x est solution si et seulement si $-x$ est solution), ce qui nous ramène à l'équation $\ln(x) = \dfrac{1}{x}^2$. On peut par exemple poser $g(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{x^2}$ et étudier les variations de cette fonction sur $]0, +\infty[$. elle est dérivable, de dérivée $g'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{x^2 + 2}{x^3}$ >0. Comme $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée) et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ (pas de problème non plus), la fonction g est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, et l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution. Comme celle-ci est différente de 1 (on constate que $g(1) = -1$, donc la solution est plus grande que 1), elle correspond à une unique valeur de x strictement positive vérifiant $f(x) = x$. Sur $\mathbb{R}$, il y a donc deux solutions, opposées l'une de l'autre.
4. C'est très similaire à ce qu'on a fait tout à l'heure : g est définie si $z \neq 0$ et si $|z| \neq 1$, c'est-à-dire si $z \notin \mathbb{U}$. Autrement dit, $\mathcal{D}_g = \mathbb{C}^*\backslash\{\mathbb{U}\}$.

5. Écrivons donc $z = re^{i\theta}$, on calcule alors $g(z) = \dfrac{1}{z\ln(r)} = \dfrac{1}{r\ln(r)}e^{-i\theta}$. Il faut distinguer deux cas : si $r > 1$, $\ln(r) > 0$, et $\dfrac{1}{r\ln(r)}$ est le module de $g(z)$, et $-\theta$ un de ses arguments. Mais si $r < 1$, il faut changer le signe : $g(z) = -\dfrac{1}{r\ln(r)}e^{i(\pi-\theta)}$, et $g(z)$ a pour module $-\dfrac{1}{r\ln(r)}$, et admet pour argument $\pi - \theta$.
6. Dans le cas où $|z| > 1$, on aura $g(z) = z$ si et seulement ces deux nombres ont même module et même argument modulo 2π, ce qui revient à dire que $\dfrac{1}{r\ln(r)} = r$, et $-\theta \equiv \theta[2\pi]$. Les valeurs possibles pour r sont donc les solutions de l'équation $f(x) = x$, ce qui n'en laisse en fait qu'une seule puisque $r > 0$. De plus, $\theta \equiv 0[pi]$, ce qui revient à dire que $z \in \mathbb{R}$. Les solutions sont donc les mêmes que pour l'équation $f(x) = x$ (il y en a donc deux).

Exercice 2

1. On obtient $u_1 = \dfrac{5}{2}$, $v_1 = \sqrt{4} = 2$, puis $u_2 = \dfrac{9}{4}$ et $v_2 = \sqrt{5}$.
2. On procède par récurrence. Au rang 0, les termes sont par définition strictement positifs. Supposons désormais u_n et v_n strictement positifs, alors $\dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $u_n v_n$ sont strictement positifs, et donc u_{n+1} et v_{n+1} le sont aussi. Le principe de récurrence permet de conclure.
3. Pas besoin de récurrence ici ! Il suffit de calculer $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n}}{2} = \dfrac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} \geq 0$. Comme de plus $u_0 \geq v_0$, l'inégalité est bien vérifiée pour tout entier naturel n.
4. Calculons $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2}$. D'après la question précédente, $v_n - u_n \leq 0$ donc $u_{n+1} \leq u_n$ et la suite (u_n) est décroissante. De même, $v_{n+1} - v_n = \sqrt{u_n v_n} - v_n = \sqrt{v_n}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}) \geq 0$ puisque $u_n \geq v_n$. La suite (v_n) est donc croissante.
5. L'inégalité de gauche a déjà été prouvée à la question 3. Pour l'égalité de droite, on a déjà constaté que $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2$. Il suffit donc de multiplier en haut et en bas par $(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2$ et d'utiliser l'identité remarquable $(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}) = u_n - v_n$ pour conclure.
6. La positivité du quotient découle encore une fois du fait que $u_n - v_n \geq 0$. Pour majorer par 1, on peut se ramener à l'inégalité $u_n - v_n \leq (\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2$ (tout est positif), soit $u_n - v_n \leq u_n + v_n + 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n}$, ou encore $0 \leq 2v_n + 2\sqrt{u_n v_n}$, ce qui est évident.
7. Il n'y a qu'à combiner les deux résultats précédents : $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{2} \times \dfrac{u_n - v_n}{(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2} \leq \dfrac{1}{2}(u_n - v_n)$.
8. Effectuons donc un raisonnement par récurrence. Pour $n = 0$, on a $u_0 - v_0 = 4 - 1 = 3$, et $3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 3$, donc l'inégalité est vérifiée. Supposons-là vraie au rang n. Alors, en appliquant le résultat de la question précédent, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(u_n - v_n) \leq \dfrac{1}{2} \times 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ (en appliquant cette fois l'hypothèse de récurrence). On obtient bien $u_{n+1} - v_{n+1} \leq 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$, et l'inégalité est donc vraie pour tout entier n.
9. On a déjà prouvé qu'une des suites était croissante et l'autre décroissante. De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, donc une application du théorème des gendarmes à l'encadrement obtenu à la

question précédente assure que $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$. Les deux suites sont bien adjacentes, et convergent donc vers une limite commune L.

10. Le réel x est une valeur approchée de L à 10^{-2} près si $|x - L| \leq 10^{-2}$.
11. Les monotonies respectives des deux suites permettent d'affirmer que, pour tout entier n, $v_n \leq L \leq u_n$, et donc que $u_n - v_n \geq u_n - L$. On peut donc être sûr que u_n est une valeur approchée de L à 10^{-2} près dès le moment où $u_n - v_n \leq 10^{-2}$, ce qui sera le cas si $3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-2}$, ou encore $2^n \geq 300$. Cela se produit si $n\ln(2) \geq \ln(300)$, donc pour $n \geq \mathrm{Ent}\left(\frac{\ln(300)}{\ln(2)}\right) + 1$. Plus simplement, on constate aisément à la main que $2^n \geq 300$ à partir de $n = 9$ (puisque $2^8 = 256$ et $2^9 = 512$).
12. (a) En reprenant les valeurs calculées en début d'exercice, $w_0 = 3$, et $w_1 = 3 + \left(\frac{5}{2} - 2\right) = \frac{7}{2}$.

    (b) On peut se contenter de constater que $w_{n+1} - w_n = u_{n+1} - v_{n+1} \geq 0$, la suite est donc croissante.

    (c) La suite étant croissante, elle est certainement minorée par $w_0 = 3$. De plus, en additionnant les inégalités de la question 8, on trouve $\sum_{k=0}^{n} u_k - v_n \leq 3\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$, soit $w_n \leq 3 \times \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 6\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ (on a utilisé la formule du calcul d'une somme géométrique). Le membre de droite de cette inégalité peut être majoré trivialement par 6, donc (w_n) est bel et bien majorée, et bornée.

    (d) Puisque la suite est croissante et majorée, le théorème de convergence monotone assure sa convergence.

    (e) Le numérateur de la suite (t_n) est en fait bornée : $3 \leq w_n \leq 6$, et $0 \leq \arctan(n) \leq \frac{\pi}{2}$ pour tout entier naturel n. On peut donc écrire que $0 \leq t_n \leq \frac{3\pi}{n+1}$, et une simple application du théorème des gendarmes assure que $\lim_{n\to+\infty} t_n = 0$.

Exercice 3

A. Quelques cas particuliers.

1. Pour $n = 1$, on a $S_1(z) = 1 + z^2$, donc $S_1(1+i) = 1 + (1+i)^2 = 1 + 1 + 2i - 1 = 1 + 2i$. Pour $n = 2$, $S_2(z) = 1 + z^2 + z^4$. Comme $(1+i)^2 = 2i$, $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$, et $S_2(1+i) = 2i - 3$.
2. Notons $z = e^{i\theta}$, dans ce cas $\bar{z} = e^{-i\theta}$ et $z^2 = e^{2i\theta}$, donc $\bar{z}S_1(z) = e^{-i\theta}(1 + e^{2i\theta}) = e^{-i\theta} + e^{i\theta} = 2\cos(\theta) \in \mathbb{R}$ (il existe de nombreuses autres façons de présenter le calcul, le recours à la forme exponentielles n'est pas du tout nécessaire). La réciproque est éviodemment fausse : si $z \in \mathbb{R}$, alors $S_1(z) \in \mathbb{R}$ et on n'a pas nécessairement $|z| = 1$ (on peut prouver que ce sont les seuls cas possibles).
3. On peut par exemple calculer $S_1(j) = 1 + e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{2i\pi}{3}}(e^{\frac{-2i\pi}{3}} + e^{\frac{2i\pi}{3}}) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)e^{\frac{2i\pi}{3}} = -e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$. Ce nombre a pour module 1, et pour argument $-\frac{\pi}{3}$.
4. L'initialisation est évidente : $S_0(j) = 1$ puisque $S_0(z) = 1$ quel que soit le nombre complexe z. Supposons désormais que $S_{3n}(j) = 1$ pour un certin entier n, alors $S_{3(n+1)}(j) = S_{3n+3}(j) = S_{3n}(j) + j^{6n+2} + j^{6n+4} + j^{6n+6} = 1 + j^{6n+2}(1 + j^2 + j^4)$. Or, $1 + j^2 + j^4 = 1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{\frac{4i\pi}{3}} = 1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{-\frac{2i\pi}{3}} = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$. On trouve bien $S_{3n+3}(j) = 1$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et, par application du principe de récurrence, pour tous les entiers naturels n.

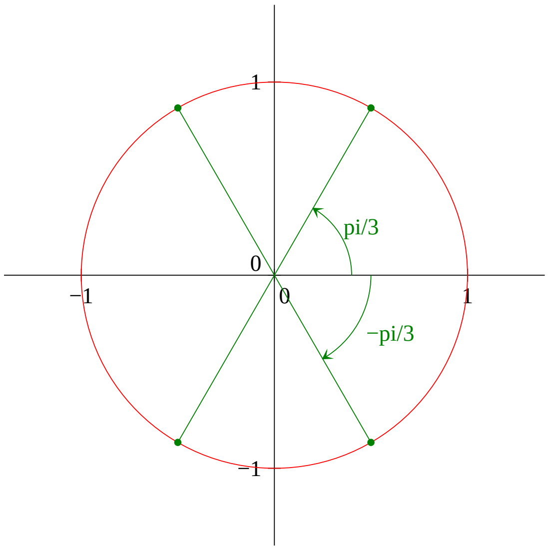
5. Puisqu'on a toujours $1^{2k} = 1$, $S_n(1) = \sum_{k=0}^{k=n} 1 = n+1$. De même pour $z = -1$ (les puissances paires de -1 sont également toutes égales à -1).

B. Étude du cas général.

1. On reconnait dans S_n une somme géométrique de raison z^2, raison qui sera différente de 1 lorsque z est différent de 1 ou -1. On peut donc écrire $S_n(z) = \dfrac{1-(z^2)^{n+1}}{1-z^2} = \dfrac{1-z^{2n+2}}{1-z^2}$.
2. Les solutions de l'équation $S_n(z) = 0$ sont donc les racines $(2n+2)$-èmes de l'unité, 1 et -1 exclus, autrement dit les complexes de la forme $z^{\frac{2ik\pi}{2n+2}}$, pour $k \in \{1; \dots; 2n+1\} \backslash \{n+1\}$. La somme de toutes les racines $(2n+2)$-èmes de l'unité étant nulle, la somme des solutions vaudra 0 puisqu'on a simplement supprimé deux racines dont la somme est nulle.
3. (a) Il suffit de constater que $S_n(z) - \dfrac{1}{1-z^2} = \dfrac{-z^{2n+2}}{1-z^2}$, et prendre le module de ce quotient : $|-z^{2n+2}| = |z|^{2n+2} = r^{2n+2}$.
   (b) L'inégalité triangulaire nous permet d'affirmer que $|1|-|z^2| \leq |1-z^2|$, soit $1-r^2 \leq |1-z^2|$. Comme r est supposé strictement inférieur à 1, $1-r^2 > 0$ et on peut passer à l'inverse pour obtenir $\dfrac{1}{|1-z^2|} \leq \dfrac{1}{1-r^2}$. Il ne reste plus qu'à tout multiplier par r^{2n+2} pour obtenir la majoration souhaitée.
   (c) Le numérateur du membre de droite de l'inégalité précédente est une suite géométrique de raison comprise entre 0 et 1, dont a pour limite 0. Par application du théorème des gendarmes, le membre de gauche qui est positif tend donc lui aussi vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

C. Autour d'une fonction de la variable complexe ...

1. C'est à peu près immédiat : $f(\bar{z}) = \dfrac{1}{1-\bar{z}^2}$, et $\overline{f(z)} = \dfrac{\bar{1}}{\overline{1-z^2}} = \dfrac{1}{1-\bar{z}^2}$.
2. Cette équation se ramène à $e^{i\frac{\pi}{4}}(1-z^2) = 2z$, soit en multipliant tous les coefficients par $\sqrt{2}$, $(1+i)z^2 + 2\sqrt{2}z - 1 - i = 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 8 + 4(1+i)^2 = 8(1+i) = 8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Une racine carrée de Δ est donc $\delta = \sqrt{8\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$, et l'équation admet deux solutions $z_1 = \dfrac{\delta - 2\sqrt{2}}{2+2i}$, et $z_2 = \dfrac{-\delta - 2\sqrt{2}}{2+2i}$.
3. En effet, $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow |1-z^2| = \dfrac{1}{1} = 1 \Leftrightarrow |(1-z)(1+z)| = 1 \Leftrightarrow |1-z| \times |1+z| = 1$. Comme $AM = |1-z|$ et $BM = |-1-z| = |1+z|$, l'équivalence demandée en découle.
4. (a) On calcule $f(z) = \dfrac{1}{1-e^{2i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}(e^{-i\theta}-e^{i\theta})} = \dfrac{e^{-i\theta}}{2i\sin\theta} = \dfrac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{2i\sin(\theta)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos(\theta)}{2\sin(\theta)}i = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\tan(\theta)}i$
   (b) On veut $|f(z)|^2 = 1$, soit $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4\tan^2(\theta)} = 1$, soit $4\tan^2(\theta) = \dfrac{4}{3}$, donc $\tan(\theta) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. ces valeurs correspondent à $\theta \equiv \dfrac{\pi}{3}[\pi]$ et $\theta \equiv -\dfrac{\pi}{3}[\pi]$ (ce qui fait quatre points sur le cercle trigonométrique.



5. (a) On a déjà fait un calcul très approchant dans la partie précédente : par inégalité triangulaire, $|z^2| - |1| \leq |z^2 - 1|$, donc $|1 - z^2| = |z^2 - 1| \geq r^2 - 1 > 0$ vu l'hypothèse faite sur r. En passant à l'inverse, on obtient immédiatement $|f(z)| \leq \dfrac{1}{r^2 - 1}$.

   (b) La question précédente prouve qu'on a alors $|f(z)|$ qui tend vers 0 (encore un coup du théorème des gendarmes avec un module positif). Autrement dit, le point P se rapproche de l'origine du repère.