TD n°4 : révisions pour le DS3

PTSI B Lycée Eiffel

17 novembre 2016

Pour s'échauffer :

Les trois questions de cet exercice sont complètement indépendantes :

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = (t^2 + 1)e^t + 2e^{2t}$.
2. Résoudre l'équation différentielle $ty'' - y' - t^3 y = 0$ en posant $y(t) = z(t^2)$.
3. Résoudre l'équation différentielle $t^2 y'' - 2ty' + (2 - t^2)y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $y(t) = tz(t)$.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle $y'' + 2y' + 4y = xe^x$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à cette équation.
2. Trouver une solution particulière de l'équation, en déduire ses solutions.
3. Déterminer explicitement la solution y vérifiant $y(0) = 1$ et $y(1) = 0$.
4. On considère pour cette dernière question l'équation $t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t\ln(t)$, où f est supposée définie uniquement sur $]0, +\infty[$. En posant $x = \ln(t)$, et en exploitant les résultats des questions précédentes, résoudre cette nouvelle équation.

Exercice 2

On s'intéresse dans cet exercice à l'équation différentielle $(1 - x)y' + xy = e^x$.

1. Sur quels intervalles va-t-on se placer pour résoudre l'équation homogène ?
2. Résoudre sur chacun de ces intervalles l'équation sans second membre associée à notre équation différentielle. On pourra remarquer que $\dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - 1$.
3. En déduire les solutions de l'équation complète sur les intervalles définis à la première question.
4. Étudier l'existence de solutions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ tout entier.
5. Montrer qu'il existe une unique solution définie sur $\mathbb{R}$, qu'on notera f_α, vérifiant $f(0) = \alpha$, et que toutes ces solutions ont des tangentes parallèles en 0.
6. Montrer que les tangentes en leur point d'abscisse 2 aux courbes représentatives des fonctions f_α sont toutes concourantes.
7. Étudier les fonctions f_α sur $\mathbb{R}$ (variations, limites).
8. Tracer dans un même graphique les courbes intégrales correspondant à $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ et $\alpha = -1$.

Exercice 3

On considère dans cet exercice l'équation différentielle $(1+x^2)y' + 2xy = \dfrac{1}{x}$. Pour tout réel λ, on note f_λ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f_\lambda(x) = \dfrac{\ln(x)+\lambda}{1+x^2}$, et par $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe représentative correspondante.

1. Sur quel(s) intervalles peut-on résoudre l'équation ?
2. Résoudre complètement l'équation sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que, si un point M du plan a pour coordonnées (α,β), avec $\alpha > 0$, il existe une unique courbe $\mathcal{C}_\lambda$ passant par la point M.
4. Calculer la dérivée f'_λ de la fonction f_λ, et prouver qu'elle est du même signe que $g_\lambda(x) = 1 + x^2 - 2x^2(\ln(x)+\lambda)$.
5. Étudier les variations de la fonction g_λ. On notera m_λ l'unique solution de l'équation $g_\lambda(x) = 0$ (qu'on ne cherchera pas à calculer).
6. Dresser le tableau de variations complet de f_λ. On prouvera en passant que $f_\lambda(m_\lambda) = \dfrac{1}{2m_\lambda^2}$.
7. Étudier les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_\lambda$, puis représenter dans un même repère une allure des courbes intégrales $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_{-1}$ et $\mathcal{C}_1$.

Exercice 4

On considère dans tout cet exercice l'équation $4z^6 + 3iz^5 + 3iz - 4 = 0$.

1. Montrer que l'équation n'admet pas de solution réelle.
2. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, montrer que $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| \geq 2$.
4. Soit z une solution de l'équation initiale, et $a = -iz$.
   (a) Donner une équation vérifiée par a.
   (b) Montrer que a est solution de l'équation $4\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^3 + 3\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2 - 12\left(a+\dfrac{1}{a}\right) - 6 = 0$.
   (c) En étudiant la fonction $g : x \mapsto 4x^3 + 3x^2 - 12x - 6$, vérifier que l'équation $g(x) = 0$ admet trois solutions distinctes dans l'intervalle $]-2,2[$.
   (d) Prouver que l'équation initiale n'admet que des solutions appartenant à $\mathbb{U}$.
   (e) En écrivant ces solutions sous la forme $e^{i\theta}$, écrire un système d'équations trigonométriques sur l'angle θ équivalent à notre équation (on ne cherchera pas à le résoudre !).