

TD n°3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

13 octobre 2016

Exercice 1

1. Notons S la somme à calculer, on peut écrire $S = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j 2i - 1 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \times (j(j+1) - j) = \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Plusieurs façons de procéder ici. On peut revenir aux définitions du cours et tenter de déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$ en fonction de y . Cette équation s'écrit $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = y$, soit $x^2 - 1 = yx^2 + y$, ou encore $x^2(1 - y) = 1 + y$, donc $x^2 = \frac{1+y}{1-y}$. Cette équation admet (au moins) une solution lorsque $\frac{1+y}{1-y} \geq 0$, c'est-à-dire pour $y \in [-1, 1[$. La fonction f n'est donc pas surjective puisque, par exemple, 2 n'admet pas d'antécédent par f . Elle n'est pas non plus injective car la plupart des réels de l'intervalle $[-1, 1[$ (tous sauf -1 en fait) admettent deux antécédents par f . Ce n'est pas une surprise dans la mesure où l'application f est une fonction paire.

Autre méthode possible : dresser le tableau de variations de f . Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$, qui est du signe de x . Les calculs de limites ne posent aucun problème en faisant le quotient des termes de plus haut degré et on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	1	-1	1

à partir duquel on conclut facilement.

Pour rendre f bijective, il suffit de choisir un intervalle sur lequel elle est strictement monotone, par exemple $I = [0, +\infty[$, et on a alors $J = [-1, 1[$.

3. On constate que $\cos(x) \sin^2(x)$ est presque de la forme $u'u^2$, ce qui donne envie de faire une IPP en posant $u'(x) = \cos(x) \sin^2(x)$, et donc $u(x) = \frac{1}{3} \sin^3(x)$; et $v(x) = x$, donc $v'(x) = 1$. On obtient $I = \left[\frac{1}{3} x \sin^3(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x) dx = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x) dx$. Reste à gérer le $\sin^3(x)$, par exemple en se rappelant la formule de triplification $\sin(3x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x)$, ce qui implique $\sin^3(x) = \frac{3}{4} \sin(x) - \frac{1}{4} \sin(3x)$. On peut continuer le calcul : $I = \frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \sin(x) - \frac{1}{12} \sin(3x) dx = \frac{\pi}{6} - \left[-\frac{1}{4} \cos(x) + \frac{1}{36} \cos(3x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{36} = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}$.

4. (a) Une méthode possible est de calculer la tangente du membre de droite à l'aide de la formule d'addition des tangentes : $\tan(\arctan(x+1) - \arctan(x)) = \frac{x+1-x}{1+x(x+1)} = \frac{1}{x^2+x+1}$ (rappelons aux plus étourdis d'entre vous qu'on peut toujours simplifier $\tan(\arctan(x))$). Les deux membres ont donc la même tangente. De plus, on sait que x^2+x+1 est toujours positif (il a un discriminant négatif, ce qui prouve d'ailleurs l'existence du membre de gauche sur $\mathbb{R}$ tout entier), donc l'angle de gauche appartient à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. À droite, $\arctan(x+1)$ et $\arctan(x)$ sont évidemment compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, et $\arctan(x+1) > \arctan(x)$ puisque la fonction $\arctan$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que l'angle de droite est compris entre 0 (strictement) et π . Deux angles compris entre 0 et π ayant la même tangente sont égaux, on peut donc conclure que $\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan(x+1) - \arctan(x)$.
- Autre méthode : on pose brutalement $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) - \arctan(x+1) + \arctan(x)$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}}{1 + \frac{1}{(x^2+x+1)^2}} - \frac{1}{1+(x+1)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{-2x-1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} - \frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{-2x-1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} + \frac{x^2+2x+2-x^2-1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} = 0$. Miracle, la fonction f est constante. Comme $f(0) = \arctan(1) - \arctan(1) + \arctan(0) = 1$, on en déduit que f est la fonction nulle, ce qui prouve l'égalité souhaitée.
- (b) Maintenant, c'est facile puisqu'il y a un télescopage évident : $S_n = \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \sum_{k=0}^n \arctan(k+1) - \arctan(k) = \arctan(n+1) - \arctan(0) = \arctan(n+1)$. Quand n tend vers $+\infty$, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$ (limite de la fonction $\arctan$ en $+\infty$).

Exercice 2

- On calcule donc $P_1 = 2$ (il n'y a qu'un seul terme dans le produit), puis $P_2 = P_1 \times \left(1 + \frac{1}{4}\right) = 2 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$; $P_3 = P_2 \times \left(1 + \frac{1}{9}\right) = \frac{5}{2} \times \frac{10}{9} = \frac{25}{9}$; et enfin $P_4 = P_3 \times \left(1 + \frac{1}{16}\right) = \frac{25}{9} \times \frac{17}{16} = \frac{425}{144}$.
- (a) Le plus simple est de poser $f(x) = \ln(1+x) - x$. La fonction f est définie et dérivable sur $] -1, +\infty[$, de dérivée $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$. La fonction f est donc croissante sur $] -1, 0]$ puis croissante sur $[0, +\infty[$, avec pour maximum $f(0) = 0$. Elle est donc toujours négative, ce qui prouve l'inégalité souhaitée.
- (b) Le membre de droite peut s'écrire $\frac{k - (k-1)}{(k-1)k} = \frac{1}{k^2 - k}$. Comme $0 < k^2 - k \leq k^2$, on en déduit immédiatement que $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
- (c) Constatons que $\ln(P_n) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$. En utilisant la première majoration prouvée après avoir isolé le terme numéro 1 (pour lequel la deuxième inégalité ne sera pas exploitable), $\ln(P_n) \leq \ln(2) + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}$. On enchaîne avec la deuxième inégalité : $\ln(P_n) \leq$

$\ln(2) + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \leq \ln(2) + 1 - \frac{1}{n}$ en télescopant. A fortiori, $\ln(P_n) \leq \ln(2) + 1$, donc $P_n \leq e^{1+\ln(2)} = 2e$.

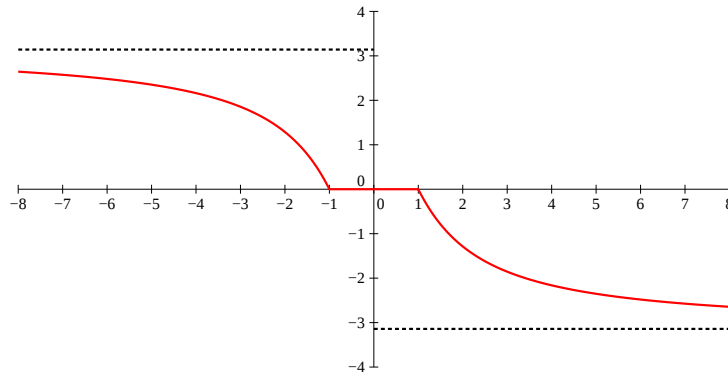
3. (a) Le plus simple, quoiqu'un peu brutal, est de faire la différence des termes et de regarder le signe du résultat obtenu : $\frac{k^2}{(k-1)(k+1)} - 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^4 - (k^2-1)k^2 - (k^2-1)}{(k-1)(k+1)k^2} = \frac{1}{k^2(k^2-1)}$, qui est bien positif pour tous les entiers k supérieurs ou égaux à 2.
- (b) On va majorer directement les termes du produit P_n (à partir du numéro 2) à l'aide de l'inégalité précédente : $P_n \leq 2 \times \prod_{k=2}^n \frac{k^2}{(k-1)(k+1)} = 2 \times \frac{n!^2}{\prod_{k=1}^{n-1} k \times \prod_{k=3}^{n+1} k} = 2 \times \frac{n!^2}{(n-1)! \times \frac{(n+1)!}{2}} = 4 \times \frac{n}{n+1} \leq 4$. On a donc prouvé la deuxième majoration, qui est évidemment meilleure que la première puisque $2e > 4$.

Exercice 3

- Puisque l'exercice est quasiment le même que le dernier du DM2, je vais me permettre de reprendre mon corrigé. Ici, la fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, la seule condition pour que x appartienne au domaine de définition de f est $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1, 1]$, ou encore $-1 - x^2 \leq 2x \leq 1 + x^2$ (on peut multiplier par $1 + x^2$ qui est toujours positif). Autrement dit, on doit avoir simultanément $-1 - 2x - x^2 \leq 0$, soit $-(1+x)^2 \leq 0$, ce qui est toujours vrai ; et $1 - 2x + x^2 \geq 0$ soit $(1-x)^2 \geq 0$, ce qui est toujours vrai aussi. Finalement, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Qui plus est, la fonction f est impaire, on peut donc restreindre son étude à l'intervalle $[0, +\infty[$.
- Calculons : $f(0) = 0$ (on sait que f est impaire !), $f(1) = \arcsin(1) - 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2} - 2 \times \frac{\pi}{4} = 0$, et $f(\sqrt{3}) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2 \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} - 2 \times \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$.
- La dérivée existe si $f(x) \notin \{-1, 1\}$, ce qui ne se produit que si $x = -1$ ou $x = 1$ (voir les calculs de la première question). Quand elle est définie, on peut écrire $f(x) = \arcsin(u(x)) - 2 \arctan(x)$ avec $u(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, et on peut calculer $u'(x) = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, puis $f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \times \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^4+2x^2-4x^2}} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{2(1-x^2)}{1+x^2} \times \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} - \frac{2}{1+x^2}$.
- Si $x \in [-1, 1]$, $1 - x^2 \geq 0$, et $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0$. La fonction f est donc constante sur $[-1, 1]$, et même nulle sur cet intervalle vu les valeurs calculées plus haut.
- Si $x \geq 1$, on a désormais $f'(x) = -\frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = -\frac{4}{1+x^2}$, donc $f(x) = -4 \arctan(x) + k$. La constante k est par exemple obtenue en regardant pour $x = \sqrt{3}$: $-\frac{\pi}{3} = -4 \times \frac{\pi}{3} + k$, donc $k = \pi$, et $f(x) = \pi - 4 \arctan(x)$.
- On sait que la fonction arctan est croissante sur $\mathbb{R}$, ce qui donne facilement les variations de la fonction f . On utilise aussi l'impairité pour compléter le tableau, la seule chose restant à calculer est la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$. On l'obtient sans problème avec la forme initiale ou avec la forme simplifiée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\pi$. D'où le tableau complet suivant :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
g	π	$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0$			$-\pi$

Et voilà la courbe :



Exercice 4

- Par définition, g_1 est une primitive de $1 \times 1 = 1$, donc de la forme $g_1(x) = x + k$. De plus, $\int_0^1 g_1(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} + kx \right]_0^1 = \frac{1}{2} + k$, et cette intégrale doit être nulle, donc $k = -\frac{1}{2}$, et $g_1(x) = x - \frac{1}{2}$.

Ensuite, g_2 est une primitive de $2g_1$, donc de la forme $x^2 - x + k$ (j'utilise la même notation k pour toutes les constantes). Or, $\int_0^1 g_2(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + kx \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + k$, donc $k = \frac{1}{6}$, ce qui correspond bien à la formule annoncée.

- On utilise exactement la même méthode, g_3 est une primitive de $3g_2(x) = 3x^2 - 3x + \frac{1}{2}$, donc $g_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + k$, et $\int_0^1 g_3(x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} + kx \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + k = k$, donc $k = 0$, et $g_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

On enchaîne : g_4 est une primitive de $4g_3(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$, donc $g_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + k$, et $\int_0^1 g_4(x) dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + kx \right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + k$, donc $k = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{15 - 10 - 6}{30} = -\frac{1}{30}$, et $g_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$.

- Puisque g_p est une primitive de pg_{p-1} , on peut écrire $g_p(1) - g_p(0) = [g_p(x)]_0^1 = \int_0^1 pg_{p-1}(x) dx$, et cette intégrale est nulle par hypothèse lorsque $p-1 \geq 1$, ce qui prouve bien que $g_p(1) = g_p(0)$ pour $p \geq 2$.
- On a évidemment $g_0(1) = 1$, et $g_1(1) = \frac{1}{2}$ en utilisant la formule obtenue pour g_1 . Ensuite, on exploite la question précédente : $g_2(1) = g_2(0) = \frac{1}{6}$, puis $g_3(1) = g_3(0) = 0$ et $g_4(1) = g_4(0) = -\frac{1}{30}$.

5. Notons $f_p(x) = g_p(x+1) - g_p(x)$, et prouvons par récurrence la propriété $P_p : f_p(x) = px^{p-1}$. On va initialiser à $p = 1$ (l'énoncé était imprecis sur ce point) : $f_1(x) = g_1(x+1) - g_1(x) = x + \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right) = 1$, ce qui est bien égal à $1 \times x^0$. Supposons désormais la propriété vraie au rang p , on peut alors calculer $f'_{p+1}(x) = g'_{p+1}(x+1) - g'_{p+1}(x) = (p+1)g_p(x+1) - (p+1)g_p(x)$ par définition des fonctions g_p . Par hypothèse de récurrence, on a donc $f'_{p+1}(x) = (p+1)px^{p-1}$, donc en primitivant $f_{p+1}(x) = (p+1)x^p + k$. Comme on sait que $f_{p+1}(0) = g_{p+1}(1) - g_{p+1}(0) = 0$, la constante est nulle et la propriété est vérifiée au rang $p+1$, elle est donc vraie pour tout entier $p \geq 1$.
6. (a) On a $S_n(0) = \sum_{k=1}^n 1 = n$, puis $S_n(1) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- (b) C'est trivial en utilisant les questions précédentes : $S_n(p) = \sum_{k=1}^n k^p$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{g_{p+1}(k+1) - g_{p+1}(k)}{p+1} = \frac{g_{p+1}(n+1) - g_{p+1}(1)}{p+1}$$
 par télescopage.
- (c) On calcule donc $S_2(p) = \frac{1}{3}(g_3(n+1) - g_3(1)) = \frac{1}{3} \left((n+1)^3 - \frac{3}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1) - 0 \right) =$

$$\frac{(n+1)}{6} (2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1) = \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3 + 1)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{6} =$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
, formule qui devrait vaguement vous rappeler quelque chose (n'oublions pas que par définition, $S_2(p) = \sum_{k=1}^n k^2$).
- De même, $S_n(3) = \frac{1}{4}(g_4(n+1) - g_4(1)) = \frac{1}{4} \left((n+1)^4 - 2(n+1)^3 + (n+1)^2 - \frac{1}{30} + \frac{1}{30} \right) =$

$$\frac{(n+1)^2((n+1)^2 - 2(n+1) + 1)}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 1)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

encore une formule normale pour $S_n(3) = \sum_{k=1}^n k^3$.
- (d) On est repartis pour un (dernier) tour : g_5 est une primitive de $5g_4(x) = 5x^4 - 10x^3 + 5x^2 - \frac{1}{6}$, donc $g_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x + k$, et $\int_0^1 g_5(x) dx = \left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{2} + \frac{5x^4}{12} - \frac{x^2}{12} + kx \right]_0^1 =$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{5}{12} - \frac{1}{12} + k$$
, donc $k = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = 0$, donc $g_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$. On en déduit que $S_n(4) = \frac{1}{5}(g_5(n+1) - g_5(0)) = \frac{1}{5} \left((n+1)^5 - \frac{5}{2}(n+1)^4 + \frac{5}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{6}(n+1) \right)$

$$= \frac{(n+1)(6(n+1)^4 - 15(n+1)^3 + 10(n+1)^2 - 1)}{30}$$

$$= \frac{(n+1)(6n^4 + 24n^3 + 36n^2 + 24n + 6 - 15n^3 - 45n^2 - 45n - 15 + 10n^2 + 20n + 10 - 1)}{30},$$

soit $S_n(4) = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$. Reste à factoriser $6n^3 + 9n^2 + n - 1$. Incroyable mais vrai, $-\frac{1}{2}$ est racine de ce polynôme : $-\frac{6}{8} + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{4} + \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = 0$ (pas de surprise, puisque l'énoncé nous annonçait une factorisation par $2n+1 = 2(n+\frac{1}{2})$). On peut donc écrire $6n^3 + 9n^2 + n - 1 = (2n+1)(an^2 + bn + c) = 2an^3 + (a+2b)n^2 + (b+2c)n + c$. Par identification, on trouve $2a = 6$, donc $a = 3$; puis $a+2b = 9$, donc $b = \frac{9-a}{2} = 3$; et enfin $b+2c = 1$ donc $c = \frac{1-b}{2} = -1$, ce qui est confirmé par le fait que $c = -1$ pour le coefficient

constant. On peut donc écrire finalement $S_n(4) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$. Le dernier facteur a pour discriminant $\Delta = 9 + 12 = 21$, les racines vont être trop moches pour que ça vaille le coup de factoriser. Conclusion : on a donc prouvé que $\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.