TD n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

2 septembre 2016

Exercice 1

1. (a) Les valeurs sont directement données dans l'énoncé : $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0.8$ (si le gardien arrête le n-ème tire, il arrête le suivant avec probabilité 0.8), et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0.6$.

   (b) Par définition, $P_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{P(A_n \cap A_{n+1}}{P(A_n)}$, donc $P(A_n \cap A_{n+1}) = 0.8 \times P(A_n)$. De même, $P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = 0.6 \times P(\overline{A_n}) = 0.6 \times (1 - P(A_n)) = 0.6 - 0.6P(A_n)$.

   (c) Il suffit de constater que l'événement A_{n+1} est réalisé si et seulement si $A_n \cap A_{n+1}$ ou $\overline{A_n} \cap A_{n+1}$ est réalisé. Ces deux derniers événements étant incompatibles, on obtient simplement $P(A_{n+1}) = 0.8P(A_n) + 0.6 - 0.6P(A_n) = 0.2P(A_n) + 0.6$.

2. (a) Calculons $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{3}{4} = 0.2u_n + 0.6 - \dfrac{3}{4} = 0.2u_n - 0.15 = 0.2\left(u_n - \dfrac{3}{4}\right) = 0.2v_n$. La suite (v_n) est donc effectivement une suite géométrique de raison 0.2.

   (b) Comme de plus on sait que $v_1 = u_1 - \dfrac{3}{4} = 0.7 - \dfrac{3}{4} = -0.05$, on en déduit que $v_n = -0.05 \times 0.2^n$, puis que $u_n = v_n + \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4} - 0.05 \times 0.2^n$.

   (c) Une suite géométrique de raison 0.2 a toujours une limite nulle, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{3}{4}$.

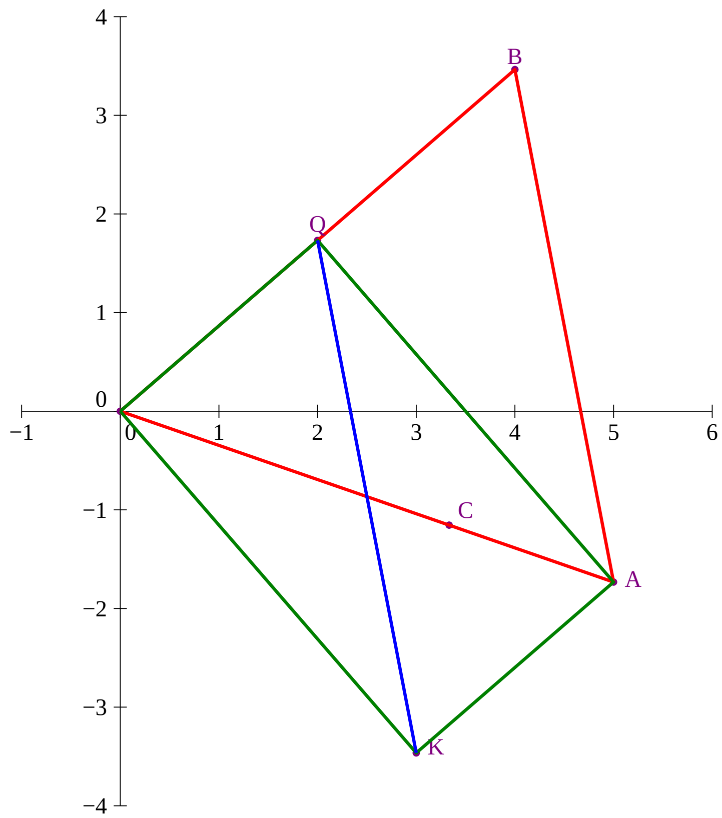
Exercice 2

1. (a) Le triangle OAB étant équilatéral direct, on a tout simplement $b = a \times e^{i\frac{\pi}{3}} = (5 - i\sqrt{3})\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5}{2} + \dfrac{5i\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2} = 4 + 2i\sqrt{3}$. On calcule ensuite directement $q = \dfrac{b}{2} = 2 + i\sqrt{3}$.

   (b) Le quadrilatère $ABQK$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KQ}$, donc $b - a = q - z_K$. On en déduit que $z_K = a - b + q = 5 - i\sqrt{3} - 4 - 2i\sqrt{3} + 2 + i\sqrt{3} = 3 - 2i\sqrt{3}$.

   (c) Calculons donc $\dfrac{z_K - a}{z_K} = \dfrac{3 - 2i\sqrt{3} - 5 + i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3}} = \dfrac{-2 - i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3}} = \dfrac{(-2 - i\sqrt{3})(3 + 2i\sqrt{3})}{(3 - 2i\sqrt{3})(3 + 2i\sqrt{3})} = \dfrac{-6 - 4i\sqrt{3} - 4i\sqrt{3} + 6}{9 + 12} = -\dfrac{i\sqrt{3}}{3}$. On en déduit que $\arg\left(\dfrac{z_K - z_A}{z_K - z_O}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, ce qui prouve que l'angle $(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{AK})$ est un angle droit. Le triangle OAK est donc rectangle en K. Comme de plus $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QB}$ (car Q est le milieu de $[OB]$) et $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{KA}$ (car $ABQK$ est un parallalogramme), le quadrilatère $OQAK$ est un parallélogramme contenant un angle droit, il s'agit donc d'un rectangle.

   (d) Voici la figure complète :



2. (a) Calculons à nouveau $\dfrac{z_K - b}{z_K - c} = \dfrac{3 - 2i\sqrt{3} - 4 - 2i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3} - \frac{10}{3} + \frac{2i\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{-1 - 4i\sqrt{3}}{-\frac{1}{3} - \frac{4i\sqrt{3}}{3}} = 3$. Ce quotient étant réel, on en déduit de façon similaire à la question 1.c que l'angle $(\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{BK})$ est un angle plat, ce qui prouve que les trois points B, C et K sont alignés.

   (b) Cf figure précédente.

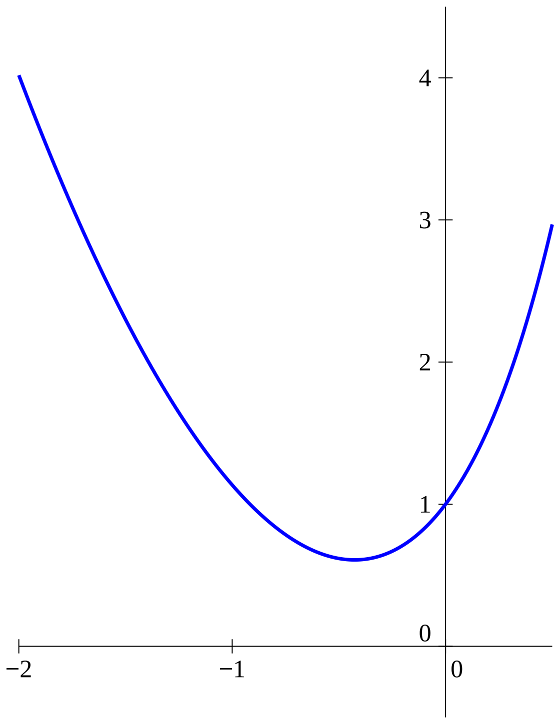
Problème

I. Études des variations de f.

1. La fonction f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x + 2e^{2x}$; $f''(x) = 2 + 4e^{2x}$.
2. (a) C'est trivial, l'exponentielle étant toujours positive, on a manifestement $f''(x) > 2$.
   (b) La fonction f' est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$ (l'exponentielle ayant une limite nulle) et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$. La fonction f' étant continue, elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et s'annule en particulier une seule fois.
   (c) La calculatrice nous donne $f'(-0.5) \simeq -0.26$ et $f'(0.4) \simeq 0.1$, la fonction f' s'annule donc bien entre ces deux valeurs.
3. (a) La fonction f' est négative sur $]-\infty, \alpha]$ et positive sur $[\alpha, +\infty[$.
   (b) Les calculs de limite ne posent pas plus de problèmes que pour f' : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
   (c) Voici ce qu'on peut indiquer dans le tableau :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

   (d) Pour aider au tracé de la courbe, on peut calculer quelques valeurs (à la calculatrice), par exemple $f(-2) \simeq 4.01$; $f(-1) \simeq 1.14$; $f(-0.5) \simeq 0.62$; $f(0) = 1$ et $f(0.5) \simeq 2.97$. La courbe ressemble à ceci :



II. Interprétation géométrique de f.

1. (a) Par définition, le point M a pour coordonnées (x, e^x) donc la distance OM est égale à $\sqrt{x^2 + (e^x)^2} = \sqrt{f(x)}$.

(b) Les fonctions f et $\sqrt{f}$ ayant les mêmes variations, on en déduit notamment que le point de la courbe Γ le plus proche de l'origine est celui d'abscisse α (noté A ensuite dans l'énoncé).

2. (a) Le point A a pour coordonnées (α, e^α). Or, on sait que α vérifie $f'(\alpha) = 0$, soit (en divisant tout par deux), $\alpha + e^{2\alpha} = 0$, ou encore $e^{2\alpha} = -\alpha$, donc $e^\alpha = \sqrt{-\alpha}$. La tangente a pour équation $y = e^\alpha(x - \alpha) + e^\alpha = e^\alpha(x - \alpha + 1)$.

   (b) La droite T a pour coefficient directeur $e^\alpha = \sqrt{-\alpha}$. Celui de la droite (OA) est obtenu en calculant $\dfrac{e^\alpha - 0}{\alpha - 0} = \dfrac{\sqrt{-\alpha}}{\alpha} = -\dfrac{1}{\sqrt{-\alpha}}$. Autrement dit, notre deuxième coefficient directeur est l'opposé de l'inverse du premier. Ceci prouve que les deux droites sont perpendiculaires.

   (c) La droite T coupe l'axe des abscisses lorsque $y = 0$ dans l'équation de T, donc lorsque $x = \alpha - 1$. L'aire calculée vaut alors exactement $\displaystyle\int_{\alpha-1}^{\alpha} e^x - e^\alpha(x - \alpha + 1)\ dx$
$= \left[e^x - \dfrac{e^\alpha x^2}{2} + e^\alpha(\alpha - 1)x\right]_{\alpha-1}^{\alpha} = e^\alpha - e^{\alpha-1} - \dfrac{e^\alpha}{2}(\alpha^2 - (\alpha-1)^2) + e^\alpha(\alpha-1)(\alpha-(\alpha-1)) =$
$e^\alpha - e^{\alpha-1} - \alpha e^\alpha + \dfrac{e^\alpha}{2} + e^\alpha(\alpha - 1) = \dfrac{e^\alpha}{2} - e^{\alpha-1}$. Passionnant.