

AP n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

9 septembre 2016

Simplifier les calculs suivants :

- $(-2)^3 = -8$
- $3x - 5 - (((2x - 1) - (3 + 2x)) - ((-2x + 1) - (3 - x))) = 3x - 5 - ((-4) - (-x - 2)) = 3x - 5 - (x - 2) = 2x - 3$
- $\frac{25 \times 12^2 \times 10^3}{24 \times 8^2 \times 12^3} = \frac{5^2 \times 2^4 \times 3^2 \times 2^3 \times 5^3}{2^3 \times 3 \times 2^6 \times 2^6 \times 3^3} = 2^{-8} \times 3^{-2} \times 5^5 = \frac{3\ 125}{2\ 304}$
- $\sqrt{2592} = \sqrt{2 \times 1296} = 2\sqrt{648} = 2\sqrt{2 \times 324} = 4\sqrt{162} = 4\sqrt{2 \times 81} = 36\sqrt{2}$
- $\frac{x^3 + x^5}{x^4 + x^6} = \frac{x^3(1 + x^2)}{x^4(1 + x^2)} = \frac{1}{x}$
- $(2x + 1)^3 - (3x + 2)^2 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - (9x^2 + 12x + 4) = 8x^3 + 3x^2 - 6x - 3$
- $\ln(72^3) - \ln(36^2) = 3\ln(8 \times 9) - 2\ln(6^2) = 3\ln(2^3 \times 3^2) - 2\ln(2^2 \times 3^2) = 9\ln(2) + 6\ln(3) - 4\ln(2) - 4\ln(3) = 5\ln(2) + 2\ln(3)$.
- $\frac{(-ab^2)^2(ab^{-1})^3(-a^2b)}{-a^2c^{-5}(-a^{-1}bc^2)^3} = \frac{-a^2b^4a^3b^{-3}a^2b}{a^2c^{-5}a^{-3}b^3c^6} = -\frac{a^8}{bc}$.
- $(x\sqrt{3} - 1)^2 - 3x\sqrt{3} + (\sqrt{3} - x)(x\sqrt{3} - 1) = 3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 - 3\sqrt{3}x + 3x - \sqrt{3} - x^2\sqrt{3} + x = (3 - \sqrt{3})x^2 + (4 - 5\sqrt{3})x + 1 - \sqrt{3}$.

Résoudre les équations et inéquations :

- $8x^3 + 27 \leq 0 \Leftrightarrow x^3 \leq -\frac{27}{8} = \left(-\frac{3}{2}\right)^3$. La fonction cube étant croissante sur \mathbb{R} , cela revient à dire que $x \leq -\frac{3}{2}$, donc $\mathcal{S} = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$.
- $\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{x(x-1) - x(x+1) + 2}{x^2-1} = \frac{2-2x}{x^2-1}$. Le numérateur de cette expression ne s'annule que lorsque $x = 1$, qui est une solution impossible pour notre équation, donc $\mathcal{S} = \emptyset$.
- e^{1-x^2} est toujours strictement positif, donc $\mathcal{S} = \emptyset$.
- On effectue le changement de variable $X = e^x$ pour se ramener à l'équation du second degré $5X^2 - 4X - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 16 + 20 = 36$, et admet deux racines $X_1 = \frac{4-6}{10} = -\frac{1}{5}$ et $X_2 = \frac{4+6}{10} = 1$. La première valeur obtenue est incompatible avec le changement de variables effectué (une exponentielle est toujours positive), la seule possibilité est donc $X = 1$, soit $x = \ln(1) = 0$, donc $\mathcal{S} = \{0\}$.
- On commence par écrire l'équation sous la forme $2(\ln(x))^2 + 3\ln(x) - 9 = 0$, puis on effectue le changement de variable $X = \ln(x)$ pour se ramener à l'équation du second degré $2X^2 + 3X - 9 = 0$, de discriminant $\Delta = 9 + 72 = 81$, et admettant pour solutions $X_1 = \frac{-3-9}{4} = -3$

et $X_2 = \frac{-3+9}{4} = \frac{3}{2}$. On en déduit les valeurs correspondantes pour $x : e^{-3} = \frac{1}{e^3}$, et $x = e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e}$. Donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{e^3}, e\sqrt{e} \right\}$.

On calcule donc :

- $f(1) = \frac{1-3-1}{2+1-3-2} = \frac{3}{2}$
- $f(3) = \frac{27-9-1}{54+9-9-2} = \frac{17}{52}$
- $f(-2) = \frac{-8+6-1}{-16+4+6-2} = \frac{3}{8}$
- $f(-3) = \frac{-27+9-1}{-54+9+9-2} = \frac{19}{38} = \frac{1}{2}$
- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{8}-\frac{3}{2}-1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-2} = \frac{-\frac{19}{8}}{-3} = \frac{19}{24}$
- $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{-\frac{8}{27}+2-1}{-\frac{16}{27}+\frac{4}{9}+2-2} = \frac{\frac{19}{27}}{-\frac{4}{27}} = -\frac{19}{4}$
- $f(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}-3\sqrt{2}-1}{4\sqrt{2}+2-3\sqrt{2}-2} = \frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $f(-\sqrt{3}) = \frac{-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}-1}{-6\sqrt{3}+3+3\sqrt{3}-2} = \frac{1}{3\sqrt{3}-1} = \frac{1+3\sqrt{3}}{26}$

Calculer les dérivées des fonctions suivantes (et étudier les variations si vous êtes courageux) :

- si $f(x) = x\sqrt{1-x}$, alors $f'(x) = \sqrt{1-x} + x \times \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$. La fonction f est définie sur $] -\infty, 1]$ et admet un maximum en $\frac{2}{3}$, de valeur $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.
- si $f(x) = \frac{x}{\ln(x)-1}$, alors $f'(x) = \frac{\ln(x)-1-1}{(\ln(x)-1)^2} = \frac{\ln(x)-2}{(\ln(x)-1)^2}$. La fonction est définie sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$, elle est décroissante sur $]0, e[$ et sur $]e, e^2[$, croissante sur $]e^2, +\infty[$ et admet un minimum local en e^2 , de valeur $f(e^2) = \frac{e^2}{2-1} = e^2$.
- si $f(x) = \frac{x}{\ln(x-1)}$, alors $f'(x) = \frac{\ln(x-1) - \frac{x}{x-1}}{\ln^2(x-1)} = \frac{(x-1)\ln(x-1) - x}{\ln^2(x-1)}$, qui ne s'étudie pas du tout.
- si $f(x) = \frac{x^3+x^2-x+2}{x^3-3x^2+3x-2}$, alors, en notant D le dénominateur de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'_{13}(x) &= \frac{(3x^2+4x-1)(2x^3-3x^2+x) - (6x^2-6x+1)(x^3+2x^2-x+3)}{D^2} \\ &= \frac{6x^5-x^4-11x^3+7x^2-x-6x^5-6x^4+17x^3-26x^2+19x-3}{D^2} \\ &= \frac{-7x^4+6x^3-19x^2+18x-3}{D^2} \end{aligned}$$

Inutile d'essayer d'étudier cette horreur.

- si $f(x) = \sqrt{x} \ln(x) e^x$, alors $f'(x) = \frac{\ln(x)e^x}{2\sqrt{x}} + \frac{e^x}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \ln(x) e^x = \frac{e^x}{2\sqrt{x}} (\ln(x) + 2 + 2x \ln(x))$,

qui ne s'étudie pas bien (ceux qui ont du temps à perdre vérifieront en dérivant une deuxième fois que la fonction est strictement croissante sur \mathbb{R}^{+*}).

- si $f(x) = -\frac{e^x}{e^x + 2}$, alors $f'(x) = -\frac{e^x(e^x + 2) - e^x \times e^x}{(e^x + 2)^2} = -\frac{2e^x}{(e^x + 2)^2}$. Cette dérivée est manifestement négative partout où elle est définie (donc sur \mathbb{R} tout entier).
- si $f(x) = \frac{2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, alors $f'(x) = -\frac{4}{x^3}e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} \times \frac{2}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = -\frac{4x + 2}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$. La fonction f est définie sur \mathbb{R}^* , croissante sur $]-\infty, -\frac{1}{2}]$, et décroissante sur $]-\frac{1}{2}, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
- si $f(x)\sqrt{2(\ln(x))^2 + \ln(x^2) - 3\ln(x)} = \sqrt{2\ln^2(x) - \ln(x)}$, alors $f'(x) = \frac{\frac{4\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}}{2\sqrt{2\ln^2(x) - \ln(x)}} = \frac{4\ln(x) - 1}{2x\sqrt{2\ln^2(x) - \ln(x)}}$. La fonction f est définie sur $]0, 1] \cup [\sqrt{e}, +\infty[$, elle est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$ (la valeur d'annulation du numérateur de la dérivée n'est pas dans le domaine de définition).
- si $f(x) = (1-2x)\sqrt{1-x^2}$, alors $f'(x) = -2\sqrt{1-x^2} + (1-2x) \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2(1-x^2) - x(1-2x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4x^2 - x - 2}{\sqrt{1-x^2}}$. La fonction f est définie sur $[-1, 1]$, et sa dérivée s'annule deux fois sur cet intervalle.