

# Chapitre 1 : Calcul dans $\mathbb{R}$

PTSI B Lycée Eiffel

11 septembre 2015

*Le calcul que vous trouvez si mauvais est pourtant celui de toutes les passions.  
Des années entières de poursuite, pour la jouissance d'un moment.*

DENIS DIDEROT

Ce premier chapitre un peu fourre-tout va nous permettre d'une part de fixer un certain nombre de notations et de termes de vocabulaire essentiels que nous utiliserons en permanence tout au long de l'année, d'autre part de voir ou revoir des techniques de calcul sur les nombres réels, qui là aussi nous serviront tout au long de l'année.

## Objectifs du chapitre :

- maîtrise de l'utilisation des quantificateurs  $\exists$  et  $\forall$  : compréhension d'un énoncé faisant intervenir une succession de quantificateurs, capacité à donner la négation d'un énoncé quantifié.
- maîtrise des règles de calcul sur les inégalités, sur les valeurs absolues, et connaissance des identités remarquables.

## 1 Éléments de vocabulaire

La logique est un domaine un peu à part au sein des mathématiques, essentiel à la construction même de l'ensemble de la théorie mathématique. À notre petit niveau, nous ne ferons rien de bien compliqué, contentons-nous de considérer la logique comme une sorte de grammaire des mathématiques. Pour bien comprendre le sens exact que l'on attribue à chaque énoncé qui contient un texte mathématique, il est important de s'appuyer sur des bases rigoureuses. En ce qui concerne les ensembles, ils forment les briques élémentaires de la grande théorie des mathématiques qui est en cours aujourd'hui. Tous les objets mathématiques que vous manipulerez cette année (y compris les fonctions, ou même les nombres entiers par exemple) peuvent être vus comme des ensembles. Là encore, rien de compliqué dans ce chapitre, simplement quelques définitions, que nous compléterons dans un chapitre ultérieur.

### 1.1 Ensembles

**Définition 1.** Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques. Il peut être décrit en donnant la liste de tous ses éléments, mais sera plus souvent (notamment pour les ensembles infinis) défini par une propriété commune de ces objets, par exemple  $[2; 3[ = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3\}$ . Le symbole  $\in$  signifie « appartient à » et le symbole  $\mid$  signifie « tels que ». La notation entre accolades désigne toujours un ensemble en mathématiques.

**Définition 2.** Deux ensembles  $E$  et  $F$  sont **égaux** s'ils contiennent exactement les mêmes éléments. L'ensemble  $F$  est **inclus** dans l'ensemble  $E$  si tout élément de  $F$  appartient aussi à  $E$ . On le note  $F \subset E$ .

**Méthode :** Pour montrer que deux ensembles  $E$  et  $F$  sont égaux, on peut procéder par double inclusion, c'est-à-dire prouver séparément le fait que  $E \subset F$  et  $F \subset E$ .

*Remarque 1.* Il ne faut pas confondre appartenance et inclusion. Ainsi,  $\sqrt{7} \in [2; 3[$ , mais  $[\pi - 1; \sqrt{7}] \subset [2; 3[$ .

**Définition 3.** L'ensemble ne contenant aucun élément, appelé **ensemble vide**, est noté  $\emptyset$ .

**Définition 4.** Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles, la **réunion** (ou plus simplement l'union) de  $A$  et  $B$  est l'ensemble, noté  $A \cup B$ , constitué de tous les éléments appartenant à  $A$  ou à  $B$ . L'**intersection** de  $A$  et de  $B$  est l'ensemble constitué de tous les éléments appartenant à la fois à  $A$  et à  $B$ .

*Remarque 2.* On peut en fait définir beaucoup plus généralement l'union ou l'intersection de plus de deux ensembles, et même d'une infinité d'ensembles (un élément de la réunion appartenant à au moins un des ensembles, et un élément de l'intersection à tous les ensembles). L'union ou l'intersection des

ensembles  $A_i$ , pour  $i$  variant dans  $\mathbb{N}$ , sera notée  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$  ou  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ . Ainsi,  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} \left] \frac{1}{i}, i \right[ = ]0, +\infty[ = \mathbb{R}^{+*}$ ,  
 et  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} \left[ 1, 1 + \frac{1}{i} \right[ = \{1\}$ .

**Définition 5.** Soit  $F$  un sous-ensemble d'un ensemble  $E$ . Le **complémentaire** de  $F$  dans  $E$  est l'ensemble  $\overline{F} = \{x \in E \mid x \notin F\}$ .

**Proposition 1.** Lois de Morgan.

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ (et plus généralement } \overline{\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{A_i})$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ (et plus généralement } \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{A_i})$$

## 1.2 Quantificateurs et équivalences

**Définition 6.** Nous utiliserons tout au long de l'année dans nos énoncés de théorèmes et de propositions les deux symboles suivants, appelés un peu pompeusement **quantificateur existentiel** et **quantificateur universel** :

- le symbole  $\exists$  signifie « il existe » ; ainsi, le fait qu'une fonction  $f$  s'annule sur l'intervalle  $[0; 1]$  peut s'écrire plus mathématiquement  $\exists x \in [0; 1], f(x) = 0$ .
- le symbole  $\forall$  signifie « quel que soit » ; ainsi, le fait qu'une fonction  $f$  soit nulle sur l'intervalle  $[0; 1]$  s'écrit  $\forall x \in [0; 1], f(x) = 0$ . Notez bien la différence entre ces deux exemples, il est évidemment essentiel de ne pas confondre les deux symboles.

*Remarque 3.* Dans les cas où a besoin de plusieurs quantificateurs pour exprimer une propriété (ça arrive souvent), l'ordre dans lequel on les dispose est aussi très important. On les lit naturellement de gauche à droite, ce qui donne par exemple :

- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \neq x \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$  signifie que  $f$  admet un maximum (global) en  $x$  ( $f(x)$  est plus grand que toutes les autres images par  $f$ ).
- $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \neq y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$  signifie que  $f$  n'admet pas de maximum (quelle que soit la valeur de  $y$ , on peut trouver un  $x$  ayant une image plus grande par  $f$ ).

En général, il faut retenir que, dans un énoncé commençant par  $\forall x, \exists y$ , la variable  $y$  dépend de  $x$ , alors que dans le cas où l'énoncé stipule  $\exists y, \forall x$ , le  $y$  est universel, il doit fonctionner pour toutes les valeurs de  $x$  possibles.

**Définition 7.** Le symbole  $\Rightarrow$  est un symbole d'**implication** :  $A \Rightarrow B$  signifie que la propriété B est vraie dès que A l'est (par contre, si A est fausse, B peut bien être vraie ou fausse, ça n'a pas d'importance). Le symbole  $\Leftrightarrow$  est un symbole d'équivalence :  $A \Leftrightarrow B$  signifie que A implique B et B implique A. Autrement dit, dès que l'une est vraie, l'autre aussi, et dès que l'une est fausse l'autre aussi. Autre façon de voir les choses :  $A \Rightarrow B$  et sa **réciroque**  $B \Rightarrow A$  sont toutes les deux vraies.

**Exemple** (théorème de Pythagore et réciproque) : Un triangle  $ABC$  est rectangle en  $A \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$ .

*Remarque 4.* Quand on calcule les longueurs des côtés d'un triangle, et qu'on invoque l'absence d'égalité de Pythagore pour prouver que le triangle n'est pas rectangle, on n'utilise pas la réciproque du théorème, mais bel et bien le théorème lui-même, ou plutôt sa **contraposée** : si  $A \Rightarrow B$ , la contraposée stipule que la négation de B implique la négation de A. Lorsqu'une implication est vraie, sa contraposée l'est également.

**Méthode** : Pour prouver une équivalence  $A \Leftrightarrow B$ , on procède souvent en prouvant séparément les deux implications  $A \Rightarrow B$ , et  $B \Rightarrow A$ . Faites très attention à ne pas vous contenter de prouver l'une des deux implications.

## 2 Méthodes de calcul sur les nombres réels

### 2.1 Ordre et inégalités dans $\mathbb{R}$

**Définition 8.** L'ensemble  $\mathbb{R}$  est muni d'un ordre naturel  $\leq$  qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- réflexive :  $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$ .
- antisymétrique : si  $x \leq y$  et  $y \leq x$ , alors  $y = x$ .
- transitive : si  $x \leq y$  et  $y \leq z$ , alors  $x \leq z$ .

On dit que  $\leq$  constitue une **relation d'ordre** sur l'ensemble  $\mathbb{R}$ . Cette relation d'ordre est **totale**, c'est-à-dire que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a soit  $x \leq y$ , soit  $y \leq x$  (on peut comparer deux éléments quelconques de  $\mathbb{R}$ ).

*Remarque 5.* Les propriétés caractéristiques d'une relation d'ordre sont des propriétés naturelles pour que la relation permette de classer les éléments d'un ensemble. Pour donner un autre exemple de ce genre de relation, on peut considérer la notion de divisibilité sur l'ensemble  $\mathbb{N}^*$  des entiers naturels non nuls. On dit qu'un entier  $p$  divise un autre entier  $q$ , et on note  $p \mid q$ , si  $\frac{q}{p}$  est un nombre entier. Il n'est pas très difficile de vérifier que cette relation vérifie les trois caractéristiques données plus haut :  $p \mid p$  puisque  $\frac{p}{p} = 1$ , un entier qui en divise un autre est nécessairement plus petit, donc  $p \mid q$  et  $q \mid p$  implique que  $p \leq q$  et  $q \leq p$ , donc  $q = p$ ; et enfin si  $p \mid q$  et  $q \mid r$  alors  $\frac{q}{p}$  et  $\frac{r}{q}$  sont entiers, donc  $\frac{r}{p}$ , qui est le produit des deux, également. Par contre, cette relation d'ordre n'est pas totale, puisque par exemple 2 et 3 ne sont pas comparables (ni  $\frac{2}{3}$  ni  $\frac{3}{2}$  ne sont entiers). Cela peut se visualiser par le fait qu'on peut ordonner parfaitement les réels sur une droite, alors que classer les entiers par la relation de divisibilité donne un schéma nettement moins clair !

**Définition 9.** Soit  $A \subset \mathbb{R}$ . Le réel  $M$  est un **majorant de A** (ou  $A$  est **majorée par M**) si  $\forall x \in A, x \leq M$ . On définit un **minorant**  $m$  de façon symétrique par la condition  $\forall x \in A, m \leq x$ . Le réel  $M$  constitue une **borne supérieure de A** si de plus, pour tout autre majorant  $M'$  de  $A$ , on a  $M \leq M'$ . On définit de même une **borne inférieure** comme un plus grand minorant de l'ensemble  $A$ . On note ces réels respectivement  $\sup(A)$  et  $\inf(A)$ . Un ensemble est **borné** s'il est à la fois majoré et minoré.

*Remarque 6.* Un majorant n'appartient pas nécessairement à l'ensemble  $A$ . Si c'est le cas, on dit que  $M$  constitue un maximum de  $A$  (symétriquement un minimum si c'est un minorant appartenant à  $A$ ).

**Exemple** L'intervalle  $]2, 4[$  admet pour majorant 12 (et plein d'autres), mais n'a pas de maximum. Par contre, 4 est une borne supérieure de l'intervalle. L'intervalle  $[2, +\infty[$  n'est pas majoré (et n'a donc pas non plus de maximum ou de borne supérieure).

**Théorème 1.** Tout sous-ensemble majoré de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure. Tous sous-ensemble minoré de  $\mathbb{R}$  admet une borne inférieure.

**Proposition 2.** Règles de calcul sur les inégalités dans  $\mathbb{R}$ .

- On peut ajouter ou soustraire une même constante à tous les membres d'une inégalité ou d'un encadrement. Ainsi, si  $1 \leq x \leq 3$ , on aura  $-2 \leq x - 3 \leq 0$ .
- On peut multiplier ou diviser une inégalité par une constante, en changeant le sens des inégalités si cette constante est négative. Ainsi, si  $1 \leq x \leq 3$ , alors  $-6 \leq -2x \leq -2$ .
- On peut additionner des inégalités. Si  $1 \leq x \leq 3$  et  $2 \leq y \leq 5$ , alors  $3 \leq x + y \leq 8$ .
- On ne peut pas soustraire deux inégalités. En reprenant l'exemple précédent, si on souhaite encadrer  $x - y$ , on commence par encadrer  $-y$  sous la forme  $-5 \leq -y \leq -2$ , puis on additionne les encadrements de  $x$  et de  $-y$  pour obtenir  $-4 \leq x - y \leq 1$ .
- On peut multiplier deux inégalités à condition que leurs membres soient tous positifs. Dans le cas contraire, il convient de prendre soin de réfléchir aux bornes obtenues. Ainsi, toujours avec les mêmes encadrements pour  $x$  et  $y$ , on obtient  $2 \leq xy \leq 15$ .
- On peut inverser une inégalité à condition que tous ses membres soient de même signe (positifs ou négatifs, peu importe), en changeant le sens des inégalités. Cela découle de la décroissance de la fonction inverse sur les intervalles  $] - \infty; 0[$  et  $]0; +\infty[$ . Ainsi, on aura  $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq 1$ .
- Pour diviser deux inégalités, tout comme pour la soustraction, on commence par encadrer un inverse avant de tenter une multiplication. Ainsi, on aura ici  $\frac{2}{3} \leq \frac{y}{x} \leq 5$ .
- On peut appliquer à une inégalité toute fonction croissante sans en changer le sens, et toute fonction décroissante en en changeant le sens. Par exemple, quand cela a un sens, on peut mettre des racines carrées sur tous les membres d'une inégalité sans problème.

**Exemple :** résolution d'inéquation à l'aide d'un tableau de signes. On souhaite résoudre l'inéquation  $\frac{x^2 + x - 2}{x + 2} \geq 2$ . pour cela, on ne multiplie surtout pas les deux membres par  $x + 2$ , car son signe dépend de  $x$ . À la place, on fait tout passer à gauche et on met au même dénominateur, pour obtenir l'inéquation  $\frac{x^2 - x - 6}{x + 2} \geq 0$ . Le numérateur a pour discriminant  $\Delta = 1 + 24 = 25$  et admet donc pour racines  $x_1 = \frac{1 + 5}{2} = 3$  et  $x_2 = \frac{1 - 5}{2} = -2$ . On peut alors dresser le tableau de signes suivant :

|                             |   |    |   |   |   |
|-----------------------------|---|----|---|---|---|
| $x$                         |   | -2 |   | 3 |   |
| $x^2 - x - 6$               | + | 0  | - | 0 | + |
| $x + 2$                     | - | 0  | + |   | + |
| $\frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$ | - |    | - | 0 | + |

Il ne reste plus qu'à conclure :  $\mathcal{S} = [3, +\infty[$ .

## 2.2 Identités remarquables et polynômes du second degré

**Définition 10.** Une **factorisation** consiste à transformer une somme en produit. Au contraire, un **développement** transforme un produit en somme.

**Proposition 3.** Identités remarquables.

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

*Remarque 7.* La troisième identité remarquable est utilisée dans tous les calculs faisant intervenir des **quantités conjuguées**. La quantité conjuguée d'une somme  $A + B$  est simplement la différence  $A - B$ . Le fait de multiplier numérateur et dénominateur d'une fraction par une quantité conjuguée permet par exemple de faire disparaître les racines carrées se trouvant au dénominateur. Ainsi,  $\frac{2 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = \frac{(2 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{8 + 5\sqrt{2}}{7}$ .

**Définition 11.** Un **polynôme** est une expression de la forme  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ,  $n$  étant un entier naturel appelé **degré** du polynôme et  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des nombres réels appelés **coefficients** du polynôme.

**Proposition 4.** Résolution des équations du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$ .

En notant  $\Delta = b^2 - 4ac$  le **discriminant** de l'équation, on a les cas suivants :

- si  $\Delta > 0$ , l'équation admet deux solutions  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ .
- si  $\Delta = 0$ , l'équation admet une seule solution double  $x = \frac{-b}{2a}$ .
- si  $\Delta < 0$ , l'équation admet deux solutions complexes conjuguées  $x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ .

**Proposition 5.** Tableau de signe d'un polynôme du second degré.

Dans le cas où le polynôme admet deux racines, le tableau de signe ressemble à ceci :

| $x$             | $x_1$  | $x_2$                    |
|-----------------|--|--------------------------|
| $ax^2 + bx + c$ | signe de $a$ $\emptyset$ signe opposé à celui de $a$ | $\emptyset$ signe de $a$ |

*Remarque 8.* Lorsqu'on effectue le tableau de signe d'un polynôme, quel que soit son degré, le signe se trouvant à droite de la dernière racine est toujours celui de  $a$  (coefficient du terme de plus haut degré).

**Proposition 6.** Si un polynôme s'annule en  $x = a$ , alors on peut le factoriser par  $(x - a)$  (et le deuxième facteur sera un polynôme de degré un de moins que le polynôme initial).

**Exemple :** On utilise ce principe pour résoudre notamment des équations du troisième quand on arrive à en trouver une racine dite « évidente » (il existe des méthodes générales pour résoudre les équations du troisième et du quatrième degré, mais nous ne les verrons pas car elles nécessitent des connaissances sur les nombres complexes).

Prenons l'équation  $x^3 - x^2 - x - 2$ , qui a pour racine évidente 2 (puisque  $2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 0$ ). On peut donc effectuer une factorisation sous la forme  $x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$ . Pour déterminer les coefficients  $a, b$  et  $c$  et pouvoir finir la résolution, nous utiliserons le principe suivant :

**Proposition 7.** Principe d'identification des coefficients.

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

Ici, en développant le membre de droite, on obtient  $x^3 - x^2 - x - 2 = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$ , dont on déduit, en regardant coefficient par coefficient, les égalités  $a = 1, b - 2a = -1, c - 2b = -1$  et  $-2c = -2$ , dont on déduit  $a = b = c = 1$  (le système a une solution unique). On a donc  $x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2)(x^2 + x + 1)$ . Le deuxième facteur ayant un discriminant négatif, il n'a pas de racine, et  $x = 2$  est donc l'unique solution de l'équation initiale.

Une autre technique est possible pour déterminer la factorisation, celle de la division euclidienne. Le principe est exactement le même que celui de la division euclidienne sur les entiers, que vous avez apprise au primaire. Ici, on peut présenter le calcul de la façon suivante :

$$\begin{array}{r|l}
 X^3 - X^2 - X - 2 & X - 2 \\
 - (X^3 - 2X^2) & X^2 + X + 1 \\
 \hline
 X^2 - X - 2 & \\
 - (X^2 - 2X) & \\
 \hline
 X - 2 & \\
 - (X - 2) & \\
 \hline
 0 & 
 \end{array}$$

Conclusion :  $x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2)(x^2 + x + 1)$ . La fin de la résolution se fait comme ci-dessus.

### 2.3 Valeurs absolues

**Définition 12.** La **valeur absolue** d'un réel  $x$  est sa distance à 0. Ainsi, une valeur absolue est toujours positive. On peut généraliser ce résultat en remarquant que, pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $|x - y|$  représente la distance entre  $x$  et  $y$ . Cette notion de distance est notamment très utile pour résoudre des équations et inéquations faisant intervenir des valeurs absolues.

**Exemple :** Pour résoudre l'équation  $|x - 2| = 5$ , on peut la traduire sous la forme « La distance entre  $x$  et 2 est égale à 5 ». Il existe alors deux possibilités pour  $x$  : soit  $x$  est à distance 5 à droite de 2, autrement dit  $x = 2 + 5 = 7$ , soit  $x$  est à distance 5 à gauche de 2, autrement dit  $x = 2 - 5 = -3$ . Autre méthode de résolution par le calcul pur : les deux nombres ayant pour valeur absolue 5 sont 5 et  $-5$ , donc on a  $x - 2 = 5$  ou  $x - 2 = -5$ , ce qui donne évidemment les deux mêmes solutions que ce-dessus. Plus généralement :

**Proposition 8.** L'équation  $|x - a| = b$  a toujours deux solutions lorsque  $b > 0$  qui sont  $a + b$  et  $a - b$ .

**Exemple :** Pour résoudre l'inéquation  $|x - 1| \geq 3$ , les deux mêmes méthodes sont disponibles. En revenant à la notion de distance, on veut que la distance de  $x$  à 1 soit au moins égale à 3, ce qui donne deux zones de solutions possibles, l'une à gauche de  $-2$ , l'autre à droite de 4. Autrement dit,  $\mathcal{S} = ]-\infty; -2] \cup [4; +\infty[$ .

Par le calcul, il faut faire attention à bien écrire les deux inégalités possibles :  $x - 1 \geq 3$  ou  $x - 1 \leq -3$ , ce qui donne là-aussi les mêmes solutions. Plus généralement :

**Proposition 9.** L'inéquation  $|x - a| \leq b$  a pour solution (lorsque  $b > 0$ ) l'intervalle  $[a - b; a + b]$ . L'inéquation  $|x - a| \geq b$  a pour solution l'union d'intervalles  $]-\infty; a - b] \cup [a + b; +\infty[$ .

**Proposition 10.** Deux nombres réels ont la même valeur absolue si et seulement si ils sont égaux ou opposés.

**Exemple :** Pour résoudre une équation du type  $|x^2 - 4x + 5| = |x - 1|$ , il suffit de considérer les deux équations  $x^2 - 4x + 5 = x - 1$  et  $x^2 - 4x + 5 = 1 - x$  et de les résoudre séparément. La première équation  $x^2 - 5x + 6 = 0$  a pour discriminant  $\Delta = 25 - 24 = 1$ , et admet donc deux racines  $x_1 = \frac{5 + 1}{2} = 3$ , et  $x_2 = \frac{5 - 1}{2} = 2$ . La deuxième équation  $x^2 - 3x + 4 = 0$  a pour discriminant  $\Delta = 9 - 16 = -7$  et n'admet donc pas de solutions. Finalement, l'équation initiale a donc pour solutions 2 et 3.

**Proposition 11.** Quelques autres propriétés des valeurs absolues qui peuvent être utiles pour les calculs :

- $\forall x \in \mathbb{R}, |-x| = |x|$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| = |x| \times |y|$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*, \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
- **Inégalité triangulaire**  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \leq |x| + |y|$

**Exemple :** Certaines équations faisant intervenir « trop » de valeurs absolues et ne pouvant être résolues par les méthodes déjà décrites nécessiteront l'emploi d'une technique proche du tableau de signes, qui consiste, comme pour un vrai tableau de signes, à distinguer plusieurs cas suivant les valeurs de  $x$ , et à essayer d'exprimer l'équation sans valeur absolue dans chacun de ces cas. Considérons par exemple l'équation  $|x + 2| + |2x - 1| + |x - 3| = 8$ . Nous pouvons faire le tableau suivant :

| $x$                            | $-\infty$ | $-2$     | $\frac{1}{2}$ | $3$      | $+\infty$ |
|--------------------------------|-----------|----------|---------------|----------|-----------|
| $ x + 2 $                      | $-x - 2$  | $0$      | $x + 2$       | $x + 2$  | $x + 2$   |
| $ 2x - 1 $                     | $1 - 2x$  | $1 - 2x$ | $0$           | $2x - 1$ | $2x - 1$  |
| $ x - 3 $                      | $3 - x$   | $3 - x$  | $3 - x$       | $0$      | $x - 3$   |
| $ x + 2  +  2x - 1  +  x - 3 $ | $2 - 4x$  | $6 - 2x$ | $2x + 4$      | $4x - 2$ |           |

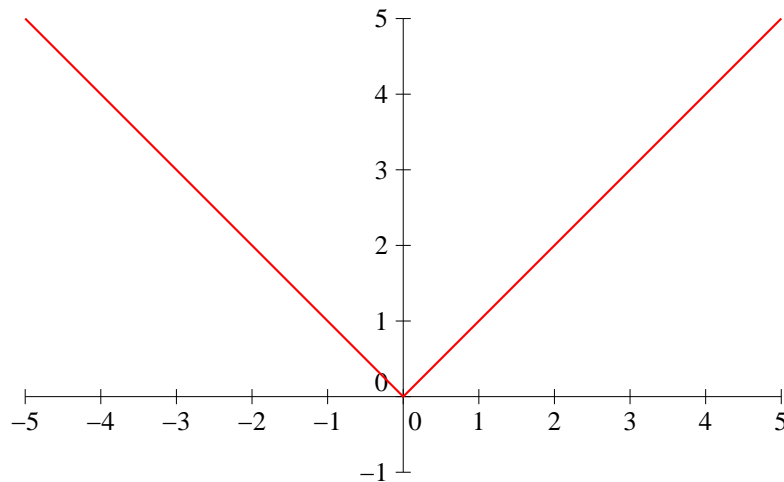
Il reste ensuite à résoudre l'équation sur chaque intervalle (donc à résoudre quatre équations), et surtout à vérifier si chacune des solutions obtenues appartient au bon intervalle. Ici,

- sur  $] -\infty; -2]$ ,  $2 - 4x = 8$  donne  $x = -\frac{3}{2}$ , solution non valable car strictement supérieure à  $-2$ .
- sur  $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ ,  $6 - 2x = 8$  donne  $x = -1$ , solution valable.
- sur  $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$ ,  $2x + 4 = 8$  donne  $x = 2$ , solution valable.
- sur  $[3; +\infty[$ ,  $4x - 2 = 8$  donne  $x = \frac{5}{2}$ , solution non valable.

Conclusion :  $\mathcal{S} = \{-1; 2\}$ .

**Définition 13.** La fonction **valeur absolue** est notée  $x \mapsto |x|$ . Elle est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $|x| = x$  si  $x \geq 0$  et  $|x| = -x$  si  $x \leq 0$ . La fonction valeur absolue est paire.

Voici la courbe représentative de la fonction valeur absolue, qui est en fait constituée de par sa définition de deux demi-droites :



**Exemple :** On veut étudier la fonction  $g$  définie par l'équation  $g(x) = |x^2 - 4x + 3|$ . Le plus simple est de commencer par ne pas se préoccuper des valeurs absolues et étudier la fonction  $h : x \mapsto x^2 - 4x + 3$ . On étudiera les variations et le signe de  $h$  pour déduire les variations de  $g$ . En effet, l'ajout de la

valeur absolue est assez simple à gérer : sur les intervalles où  $h$  sera positive, elle ne change rien ; et sur ceux où  $h$  est négative, son signe et ses variations seront opposées (graphiquement, on effectue une symétrie par rapport à l'axe des abscisses des morceaux de la courbe de  $h$  situés en-dessous de cet axe). On peut faire le gros tableau suivant (je vous épargne le calcul de  $h'$  et celui des solutions de l'équation  $h(x) = 0$ ) :

| $x$ | $-\infty$ | 1   | 2    | 3   | $+\infty$ |
|-----|-----------|-----|------|-----|-----------|
| $h$ |           | ↘ 0 | ↘ -1 | ↗ 0 | ↗         |
| $g$ |           | ↘ 0 | ↗ 1  | ↘ 0 | ↗         |

Et voici les deux courbes, en noir celle de  $h$  et en rouge celle de  $g$  :

