Chapitre 24 : Applications orthogonales en dimension 2 et 3

PTSI B Lycée Eiffel

24 juin 2016

Si quelqu'un, en l'éveil de son intelligence, n'a pas
été capable de s'enthousiasmer pour une telle architecture,
alors jamais il ne pourra réellement s'initier à la recherche théorique.

Albert Einstein, à propos de la géométrie euclidienne.

Introduction

Pour ce dernier chapitre de l'année (mais oui, déjà), nous allons en quelque sorte boucler la boucle puisque nous ferons le lien entre la géométrie du plan et de l'espace, et le formidable outil que constitue l'algèbre linéaire (notamment les applications linéaires et les matrices). On peut en fait faire de la géométrie dans à peu près tous les espaces vectoriels comme on le fait dans ces espaces usuels. Pourquoi presque ? Parce qu'il nous manque tout de même une notion fondamentale pour cela, la notion d'orthogonalité de vecteurs dont découle tout l'aspect métrique du travail géométrique, c'est-à-dire les calculs de distance notamment. C'est l'objet de notre début de chapitre, que vous approfondirez largement l'an prochain. Je ne donnerai ici que le vocabulaire permettant de mieux comprendre les classifications dans le plan et l'espace qui constituent l'essentiel de ce chapitre.

Objectifs du chapitre :

- comprendre la notion de distance dans un espace vectoriel autre que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
- connaître les différents types d'isométries dans le plan et dans l'espace.

1 Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

1.1 Norme et orthogonalité.

Certaines notions géométriques, comme le parallélisme que nous évoquerons dans la deuxième partie de ce chapître, sont intrinsèques à la structure d'espace vectoriel. D'autres, au contraire, nécessitent d'ajouter une structure supplémentaire pour être définies. c'est le cas de la notion fondamentale en géométrique vectorielle de norme et de distance, qui découle de celle de produit scalaire.

Définition 1. Le **produit scalaire** de deux vecteurs $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ appartenant à $\mathbb{R}^n$ est le nombre réel $u.v = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_i y_i$.

On suppose bien sûr dans cette définition que les coordonnées sont prises dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1. Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ est une application multilinéaire, symétrique et définie positive.

Remarque 2. Il existe plusieurs notations courantes pour les produits scalaires. Dans ce cours, nous prendrons toujours la plus économique en le notant $u.v$, mais on croise aussi régulièrement (u, v), $< u, v >$ ou encore $< u|v >$ (surtout en physique pour cette dernière).

Remarque 3. On appelle en fait plus généralement produit scalaire sur un espace vectoriel E n'importe quelle application multilinéaire, symétrique et définie positive. Il existe sur tous les espaces vectoriels classiques des quantités de produits scalaire différents, dont découlent des notions de distance et d'orthogonalité différentes. Imaginez par exemple qu'on cherche à définir une notion de « distance entre deux fonctions », il existe plein de moyens « logiques » de le faire, qui correspondent à des produits scalaires différents sur l'espace vectoriel des fonctions (il faudra sûrement ajouter une condition pour ne pas avoir trop de fonctions, mais vous étudierez ce genre d'exemples l'an prochain).

Définition 2. Soit $u \in \mathbb{R}^n$, la **norme de** u est le réel positif $\| u \| = \sqrt{u.u}$.

Proposition 1. Identité de polarisation :
$\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ u.v = \dfrac{1}{4}(\| u + v \|^2 - \| u - v \|^2)$

Démonstration. C'est une conséquence de la bilinéarité $\| u + v \|^2 - \| u - v \|^2 = u.u + 2u.v + v.v - u.u + 2u.v - v.v = 4u.v$. □

Remarque 4. Cette dernière identité est très importante d'un point de vue théorique, puisqu'elle signifie qu'on peut reconstituer le produit scalaire à partir de la connaissance de la norme. Autrement dit, une norme donnée ne peut être associée qu'à un seul produit scalaire.

Définition 3. Un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ est **unitaire** (ou **normé**) si $\| u \| = 1$. Deux vecteurs $(u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$ sont **orthogonaux** si $u.v = 0$.

Les notions de bases orthogonales et orthonormales découlent naturellement de cette dernière définition.

1.2 Endomorphismes orthogonaux.

Définition 4. Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est appelé **endomorphisme orthogonal** ou **isométrie** si $\forall (u, v) \in E^2$, $f(u).f(v) = u.v$.

Remarque 5. Un endomorphisme est donc orthogonal s'il conserve le produit scalaire, ce qui est une condition naturelle. Attention tout de même au vocabulaire, une symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonal, mais pas une projection orthogonale !

Proposition 2. Un endomorphisme est orthogonal si et seulement s'il conserve la norme : $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $\| f(u) \| = \| u \|$.

Démonstration. En effet, si f est orthogonale, on aura toujours $f(u).f(u) = u.u$, donc $\| f(u) \| = \| x \|$. La réciproque découle de l'identité de polarisation. Cette propriété explique le terme d'isométrie, ce sont des applications qui conservent les longueurs. □

Proposition 3. Un endomorphisme orthogonal est nécessairement bijectif.

Démonstration. Pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, être bijectif ou injectif est équivalent. Or, si $f(u) = 0$, d'après la propriété précédente, on aura $\| u \| = 0$, donc $u = 0$, ce qui prouve l'injectivité et donc la bijectivité de f. □

Proposition 4. Un endomorphisme f est orthogonal si et seulement s'il vérifie, au choix, l'une des deux conditions suivantes :

- L'image par f de toute base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale.

- L'image par f d'une base orthonormale fixée de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale.

Définition 5. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** si elle est la matrice représentative d'un endomorphisme orthogonal f dans une base orthonormale. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les matrices orthogonales.

Proposition 5. $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tAA = I$.

Démonstration. Supposons que ${}^tAA = I$, et notons f l'endormorphisme représenté par A dans une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ orthonormale. Dire que ${}^tAA = I$ signifie deux choses : pour chaque colonne de A, la somme des carrés des éléments de la colonne est égale à 1 (c'est le calcul qu'on fait pour obtenir $({}^tAA)_{ii}$), ce qui revient à dire que $f(e_i)$ est un vecteur de norme 1 ; et si on effectue le calcul $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$ pour $i \neq j$, on obtient 0, ce qui revient cette fois-ci à dire que $f(e_i)$ et $f(e_j)$ sont orthogonaux. Autrement dit, l'image de notre base orthonormale est une base orthonormale, donc f est orthogonal. La réciproque se fait exactement de la même façon. □

Remarque 6. Attention dans la définition des matrices orthogonales à ne pas oublier qu'on doit se placer dans une base orthonormale. Dans une base quelconque, la matrice d'une application orthogonale peut ressembler à n'importe quoi (d'inversible tout de même puisque f est bijective). Au passage, notre dernière propriété confirme que A est une matrice inversible, et même que son inverse est sa transposée.

Exemple : La matrice $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale. Pour le vérifier, on peut évidement calculer ${}^tAA$, mais on peut aussi utiliser le petit truc suivant : on vérifie que les colonnes « sont de norme 1 » et « orthogonales entre elles » comme expliqué dans la démonstration ci-dessus. Ici, $\frac{1}{9}\|(8, -1, 4)\| = \frac{1}{9}\sqrt{64 + 1 + 16} = 1$ et de même pour les deux autres colonnes ; et $(8, -1, 4).(-1, 8, 4) = -8 - 8 + 16 = 0$, et de même pour les deux autres produits scalaires de colonnes.

Proposition 6. Une matrice A est orthogonale si et seulement si ses vecteurs-colonnes forment une base orthonormale de E. De même pour les vecteurs-lignes.

Démonstration. On vient de voir que c'est une autre façon de dire exactement la même chose que dans la proposition précédente. Si ça marche pour les colonnes, ça marche pour les lignes, car A est orthogonale si et seulement si ${}^tA$ l'est (cela découle de l'égalité ${}^tAA = I$). □

Proposition 7. La matrice de passage entre deux bases orthonormales est une matrice orthogonale.

Proposition 8. Si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(A) = \pm 1$. L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 est noté $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$, l'ensemble de celles de déterminant -1 est noté $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ (non, n'insistez pas, il n'y a pas d'équivalent à la notation $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ dans ce cas-là).

Démonstration. On sait que ${}^tAA = I$, et que $\det({}^tA)\det(A)$, donc $\det(A)^2 = \det(I) = 1$, la propriété en découle. □

Définition 6. Une isométrie est **directe** si sa matrice dans une base orthonormale appartient à $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, elle est **indirecte** sinon.

2 Isométries du plan

Théorème 1. Toute matrice $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, où $\theta \in \mathbb{R}$. L'application f ayant pour matrice A dans n'importe quelle base orthonormale est appelée **rotation d'angle** θ.

Démonstration. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$. On peut traduire l'égalité ${}^tAA = I$ par le système d'équations suivant : $\begin{cases} a^2 & + & b^2 & = & 1 \\ ac & + & bd & = & 0 \\ b^2 & + & d^2 & = & 1 \end{cases}$ (deux des équations obtenues sont identiques). On a de plus la condition $\det(A) = ad - bc = 1$. La dernière équation permet de poser $c = \sin(\theta)$ et $d = \cos(\theta)$, et la première de poser $a = \cos(\alpha)$ et $b = \sin(\alpha)$, pour deux réels α et θ. La deuxième condition devient alors $\cos(\alpha)\sin(\theta) - \sin(\alpha)\cos(\theta) = 0$, soit $\sin(\alpha + \theta) = 0$, et celle sur le déterminant donne de même $\cos(\theta + \alpha) = 1$. Autrement dit, on aura $\alpha \equiv -\theta[2\pi]$, et donc $\cos(\alpha) = \cos(\theta)$ et $\sin(\alpha) = -\sin(\theta)$, ce qui donne bien la matrice annoncée. □

Remarque 7. La matrice d'une rotation dans le plan est indépendante de la base orthonormale choisie. Bien évidemment, dans une base qui n'est pas orthonormale, la matrice peut changer.

Définition 7. Un **retournement** est une rotation plane d'angle $\theta = \pi$.

Remarque 8. C'est ce que vous avez appelé pendant des années une symétrie centrale, terme que nous n'utiliseront plus jamais même si l'application f est de fait dans ce cas une symétrie.

Proposition 9. Soit $u \in \mathbb{R}^2$ un vecteur unitaire, et f une rotation plane d'angle θ, alors $f(u).u = \cos(\theta)$ et $\det(f(u), u) = \sin(\theta)$.

Remarque 9. Cette propriété est surtout utile dans l'autre sens : à partir de l'image d'un unique vecteur (unitaire ou non), on peut déterminer facilement l'angle d'une rotation plane.

Théorème 2. Toute matrice $A \in \mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. L'application u ayant pour matrice A dans une base orthonormale est une réflexion.

Démonstration. La preuve que la matrice peut se mettre sous cette forme est identique à celle vue pour les isométries directes, à un changement de signe près à un endroit, nous nous épargnerons les calculs. Il est facile de constater que u est une symétrie (nécessairement orthogonale) en calculant $A^2 = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \end{pmatrix} = I$. C'est nécessairement une symétrie par rapport à une droite vectorielle, donc une réflexion. En effet, si le sous-espace par rapport auquel on symétrise n'est pas une droite, il s'agit soit de $\{0\}$ et alors $u = -\text{id}$, soit de $\mathbb{R}^2$ et $u = \text{id}$. Dans les deux cas, u ne serait pas une isométrie indirecte. □

Remarque 10. Dans le cas des réflexions, la matrice de u n'est pas du tout la même dans toutes les bases orthonormales. Par ailleurs, l'angle θ est beaucoup moins facile à interpréter géométriquement que dans le cas d'une rotation.

Remarque 11. Toute rotation dans le plan peut s'écrire comme composée de deux réflexions. En effet, $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & -\cos(-\theta) \end{pmatrix}$.

3 Isométries de l'espace

Définition 8. Tout élément de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ est appelé **matrice de rotation** dans l'espace.

Théorème 3. Soit f une isométrie directe de l'espace, alors $F = \ker(f - \text{id})$ est de dimension 1. Si (v, w) est une base orthonormale du plan orthogonal à F, alors la matrice de f dans la base orthonormale $(v, w, v \wedge w)$ est $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 9. Une isométrie directe ayant pour matrice A dans une base orthonormale est appelée **rotation d'axe dirigé par** $v \wedge w$ **et d'angle** θ.

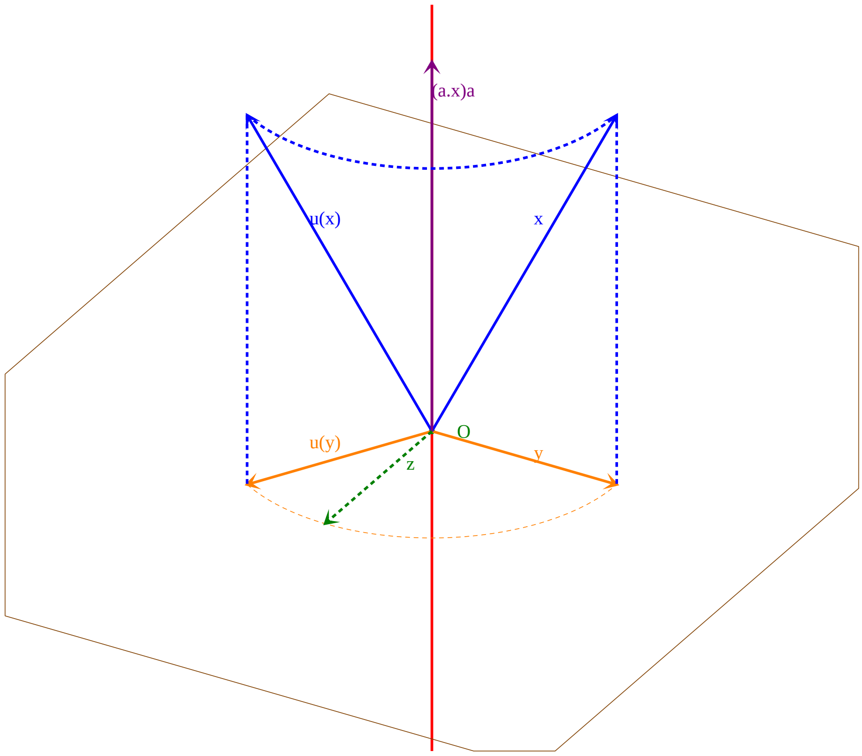
Remarque 12. Une rotation spatiale reste assez facile à visualiser : l'axe ne bouge pas, et le plan orthogonal à l'axe subit une rotation d'angle θ (autrement dit, on tourne d'un angle θ autour de l'axe). Voir le schéma plus bas. Notons quand même que la définition est un peu douteuse, car l'angle de la rotation dépend du vecteur choisi pour diriger l'axe. En effet, si on prend le vecteur opposée, l'angle va être également changé en son opposé.

Proposition 10. La composée de deux rotations dans l'espace est une rotation.

Démonstration. En effet, comme dans le plan, la composée reste une isométrie directe, donc une rotation. Mais pour le coup, ça n'a rien de géométriquement évident (et en particulier, l'angle de la rotation composée n'est pas évident à déterminer à partir de ceux des deux rotations). $\square$

Proposition 11. Soit f la rotation d'axe $F = \text{Vect}(a)$, avec a unitaire, et d'angle θ, alors $\forall u \in \mathbb{R}^3$, $f(u) = \cos(\theta)u + \sin(\theta)a \wedge u + (1 - \cos(\theta))(a.u)a$.

Remarque 13. Dans le cas particulier où u appartient au plan orthogonal à F, on trouve plus simplement $f(u) = \cos(\theta)u + \sin(\theta)(a \wedge u)$, on peut donc retrouver facilement l'angle de la rotation, quasiment comme dans le cas d'une rotation plane, à l'aide des relations $u.f(u) = \cos(\theta)$ et $\det(u, f(u), a) = \sin(\theta)$ (en choisissant un vecteur u unitaire). Sur la figure ci-dessous, l'axe de la rotation est en rouge, le plan orthogonal en marron, le vecteur noté z est $y \wedge a$.



Démonstration. La projection de u sur l'axe de la rotation est simplement donnée par $(a.u)a$. Posons $y = u - (a.u)a$, alors $(y, y \wedge a)$ est une base orthogonale directe du plan orthogonal à F constituée de deux vecteurs de même norme. De plus, $y \wedge a = (u - (a.u)a) \wedge a = u \wedge a$ puisque $a \wedge a = 0$. On en déduit que $f(y) = \cos(\theta)y - \sin(\theta)(u \wedge a)$, donc $f(u) = f(y + (a.u)a) = \cos(\theta)y + \sin(\theta)(a \wedge u) + (a.u)a$ (puisque a est laissé fixe par la rotation). Autrement dit, $f(u) = \cos(\theta)u - \cos(\theta)(a.u)a + \sin(\theta)(a \wedge u) + (a.u)a$, ce qui est bien la formule donnée. $\square$

Exemple : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice est orthogonale puisque $\frac{1}{3}\|(2,2,1)\| = \frac{1}{3}\sqrt{4+4+1} = 1$; $\frac{1}{3}\|(-2,1,2)\| = 1$; $\frac{1}{3}\|(1,-2,2)\| = 1$; $(2,2,1).(-2,1,2) = -4+2+2 = 0$; $(2,2,1).(1,-2,2) = 0$ et $(-2,1,2).(1,-2,2) = 0$. Il s'agit donc de la matrice d'une isométrie.

On calcule ensuite le déterminant pour déterminer si l'isométrie est directe : $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 3 + 3 \times 6 = 27$, donc $\det(A) = \frac{1}{3^3} \times 27 = 1$. Il s'agit d'une isométrie directe, donc d'une rotation.

On cherche ensuite l'axe de la rotation, en déterminant simplement $\ker(f - \mathrm{id})$. Quitte à tout multiplier par 3, on doit résoudre le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & z & = & 3x \\ -2x & + & y & + & 2z & = & 3y \\ x & - & 2y & + & 2z & = & 3z \end{array} \right.$. La deuxième équation donne $z = x + y$, et la dernière donne $2y = x - z$, soit $2y = -y$. Manifestement, cela implique $y = 0$, puis $z = x$; la première équation donne alors $3x = 3x$, donc $\ker(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}((1,0,1))$, qui est bien une droite F.

On choisit maintenant un vecteur unitaire v orthogonal à F. Ce n'est pas bien compliqué ici, il suffit de prendre $v = (0,1,0)$. On peut alors calculer, en notant θ l'angle de la rotation, $\cos(\theta) = v.f(v)$. Puisque $f(0,1,0) = \frac{1}{3}(2,1,-2)$, on trouve $\cos(\theta) = \frac{1}{3}$. En posant $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ (vecteur directeur unitaire de l'axe), on peut ensuite calculer $\det(v, f(v), a) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. On en déduit que $\sin(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, donc $\theta = -\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$. Seul le signe de $\sin(\theta)$ était nécessaire pour conclure, mais l'avantage de l'avoir calculé explicitement est de pouvoir vérifier que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1$. On peut en tout cas désormais affirmer que f est la rotation d'axe $\mathrm{Vect}((1,0,1))$ et d'angle $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$.

Remarque 14. Un autre moyen de vérifier la cohérence des calculs est d'utiliser la trace de la matrice. En effet, celle-ci est invariante par changement de repère, donc est égale à $2\cos(\theta) + 1$ dans n'importe quel repère. Ici, on pouvait donc calculer dès le départ $\mathrm{Tr}(A) = \frac{5}{3} = 2\cos(\theta) + 1$, et en déduire que $\cos(\theta) = \frac{1}{3}$.

Théorème 4. (Hors-programme). Si f est une réflexion dans l'espace, elle a pour matrice dans une base orthonormale bien choisie $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, toute isométrie indirecte de l'espace est la composée d'une rotation (éventuellement égale à id) et d'une réflexion.

Remarque 15. On peut toujours écrire dans l'espace une rotation comme composée de deux réflexions (c'est exactement le même calcul que dans le plan, en ajoutant un 1 en bas à droite de la matrice et des 0 ailleurs sur la dernière ligne et la dernière colonne). Il existe donc trois types d'isométries vectorielles dans l'espace :

- les réflexions, qui laissent tout un plan fixe et sont indirectes.
- les produits de deux réflexions, qui sont des rotations, laissent une droite fixe et sont directes.
- les produits de trois réflexions ne laissent que le vecteur nul invariant et sont indirectes.

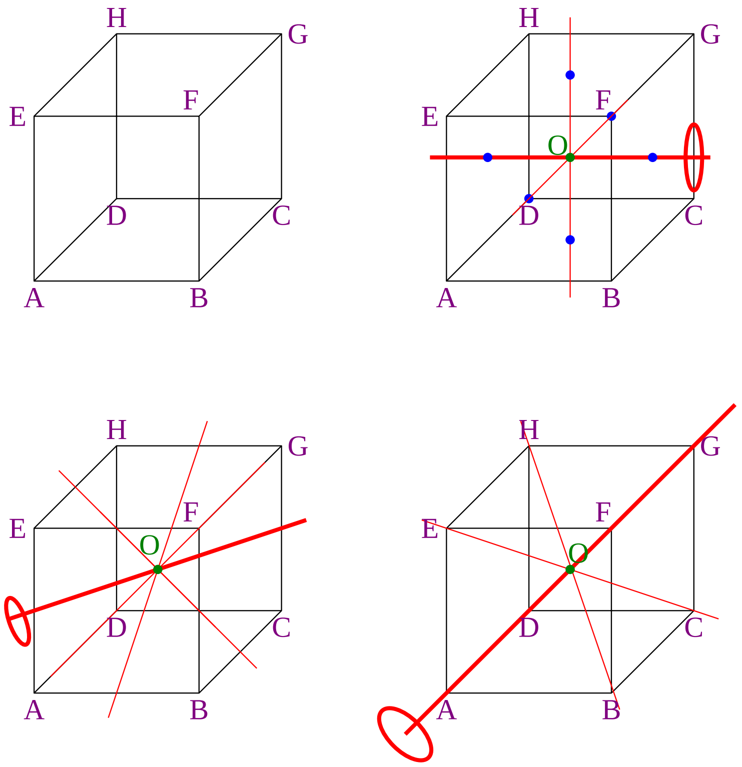
Ainsi, dans l'espace, $-\,\mathrm{id}$ est une isométrie indirecte qui est un produit de trois réflexions (par exemple par rapport aux trois axes du repère canonique). Ce n'est absolument pas la rotation d'angle π autour de l'origine, cette application n'étant pas une rotation avec la définition que nous avons prise. Pour les plus curieux, le théorème précédent se généralise en dimension n, où les isométries peuvent toujours être écrites comme produit d'au plus n réflexions.

4 Isométries du cube :

Un petit complément étudié en TD :

Considérons un cube fixé (de côté 1 par exemple, mais peu importe) centré en O, on cherche à déterminer toutes les isométries du cube, c'est-à-dire les isométries de l'espace laissant le cube globalement invariant (chaque point du cube est envoyé sur un point du même cube). On peut déjà déterminer leur nombre : par une telle isométrie, chaque sommet du cube est nécessairement envoyé sur un sommet du cube (car le point situé de l'aute côté de la grande diagonale passant par ce sommet est à une distance qui ne peut être atteinte sur le cube qu'entre deux sommets opposés) ; de plus, deux sommets ne peuvent pas être envoyés au même endroit (sinon les distances ne seraient pas respectées), donc l'isométrie effectue une permutation des sommets. Il n'y a en fait qu'une toute petite proportion de permutations possibles. Pour l'image d'un premier sommet (par exemple A sur la figure ci-dessous), on a huit possibilités (chacun des huit sommets du cube). Mais une fois l'image de A fixée, le sommet voisin B ne peut plus avoir que trois images distinctes, les trois sommets adjacents à l'image de A (par exemple si A reste fixe, B ne peut être envoyé que sur B, D ou E). Une fois les images de A et B fixées, D n'a plus que deux images possibles (si A et B restent fixes, il doit être envoyé sur D ou E), et on n'a plus le choix pour E. Une fois les images de ces quatre points choisies, on connait l'image d'un repère orthonormal par l'isométrie, qui est donc unique. Conclusion : il y a $8 \times 3 \times 2 = 48$ isométries du cube.
On peut se convaincre relativement facilement qu'il y a parmi ces 48 possibilités autant d'isométries indirectes que d'isométries directes. Soit on reprend notre calcul du nombre total d'isométries du cube, et on constate qu'au moment de choisir l'image du point D, l'un des deux choix donnera une isométrie directe et l'autre une isométrie indirecte. Soit on constate que, si on compose chacune des 48 isométries de la liste par une isométrie indirecte donnée (par exemple $-\,\mathrm{id}$, qui fait partie de la liste), toute isométrie directe va devenir indirecte, et vice-versa. Or, la composition par $-\,\mathrm{id}$ est une bijection de notre ensemble de 48 isométries vers lui-même (c'est un résultat classique de théorie des groupes, pas trop dur à redémontrer dans ce cas précis). Il y a donc autant d'isométries indirectes que directes, soit 24 dans chaque catégorie.
Contentons-nous d'essayer de faire la liste des 24 isométries directes, qui sont donc des rotations. Voici la liste :

- l'identité, qu'il faudra prendre soin de ne pas compter plusieurs fois.
- les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$, π et $\frac{3\pi}{2}$ autour de chaque axe passant par les centres de deux faces opposées (par exemple la droite (PQ), où P est le centre de $(ABCD)$ et Q le centre de $(EFGH)$). Comme il existe trois paires de faces opposées, cela fait $3 \times 3 = 9$ rotations distinctes.
- les rotations d'angle π autour de chaque axe passant par les milieux de deux arêtes parallèles opposées (par exemple la droite (IJ), où I est le milieu de $[AE]$ et J celui de $[CG]$). Comme il y a six paires d'arêtes opposées, celà fait six rotations supplémentaires.
- les rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ (ce sont les plus dures à visualiser) autour des grandes diagonales du cube. Par exemple, en prenant la diagonale (AG), les points B, D et E sont tous trois situés à la même distance de la diagonale, et dans un même plan orthogonal à cette diagonale (ils forment un triangle équilatéral dans ce plan), on peut les permuter circulairement par les deux rotations indiquées. Idem pour les sommets C, F et H. Puisqu'il y a quatre grandes diagonales, nous tenons les $2 \times 4 = 8$ rotations qui nous manquaient.



Sur cette illustration, certains des axes de rotation se superposent, ce qui peut expliquer que vous en comptiez moins que ce qui est annoncé ci-dessus.