Feuille d'exercices n°19 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

27 mai 2016

Exercice 1 (*)

Le gain du joueur peut être de 1, 2, 3 ou -1 euro. On a donc $X(\Omega) = \{-1; 1; 2; 3\}$. Notons par ailleurs que $|\Omega| = 6^3 = 216$ (on lance trois dés à 6 faces). Il ne reste plus qu'à calculer la probabilité de sortir un nombre de 6 donné pour obtenir la loi de X. Pour obtenir trois 6, il n'y a qu'un tirage possible, soit une probabilité de $\frac{1}{216}$. Pour deux 6, on a le choix du dé qui ne donnera pas un 6 (trois possibilités), ainsi que du chiffre obtenu sur ce dé (cinq possibilités), soit une probabilité de $\frac{3 \times 5}{216} = \frac{15}{216}$. De même, pour un 6, trois choix pour le dé qui donne 6, et cinq choix pour le résultat de chacun des deux dés restants, soit une probabilité de $\frac{3 \times 5^2}{216} = \frac{75}{216}$. Enfin, si on n'obtient pas de 6, on a cinq choix pour chaque dé, soit une probabilité de $\frac{5^3}{216} = \frac{125}{216}$. On vérifie que la somme de ces probabilités est bien égale à 1, et on a donc la loi suivante :

k	-1	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Le reste est du pur calcul : $E(X) = \frac{-1 \times 125 + 1 \times 75 + 2 \times 15 + 3 \times 1}{216} = -\frac{17}{216} \simeq -0.08$. On perdra donc en moyenne huit centimes d'euros par partie. Ensuite, $E(X^2) = \frac{1 \times 125 + 1 \times 75 + 4 \times 15 + 9 \times 1}{216} = \frac{269}{216}$, donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{269}{216} - \left(\frac{17}{216}\right)^2 = \frac{57\ 815}{46\ 656} \simeq 1.24$ (soit $\sigma \simeq 1.11$).

Exercice 2 (* à **)

1. Pour déterminer la loi de X_1, peu importe l'ordre dans lequel on a effectué les trois premiers tirages. On peut donc considérer qu'on a tiré simultanément trois boules parmi les six de l'urne, ce qui fait au total $\binom{6}{3} = 20$ tirages possibles. Parmi ceux-ci, un seul ne laisse aucune boule numéro 1 dans l'urne (il faut évidemment tirer les trois boules numéro 1). Symétriquement, un seul laisse trois boules numéros 1 dans l'urne. Pour avoir $X_1 = 1$, il faut tirer deux boules 1 parmi les trois disponibles, et une boule parmi les trois autres, soit $\binom{3}{2} \times \binom{3}{1} = 3 \times 3 = 9$. Le nombre de tirages donnant $X_1 = 2$ vaut également 9 (la situation est en fait symétrique). Soit une loi pour X_1 donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

On calcule ensuite $E(X_1) = \frac{0 \times 1 + 1 \times 9 + 2 \times 9 + 3 \times 1}{20} = \frac{3}{2}$; puis $E(X_1^2) = \frac{1 \times 9 + 4 \times 9 + 9 \times 1}{20} = \frac{54}{20} = \frac{27}{10}$ et $V(X_1) = \frac{27}{10} - \frac{9}{4} = \frac{9}{20}$.

2. Au minimum, il faudra trois tirages pour ne plus avoir de boules 1. Au pire, il en faudra bien sûr six. Pour avoir $X_2 = 3$, il faut tirer les trois boules 1 lors des trois premiers tirages, on a vu plus haut que cela se produisait avec probabilité $\dfrac{1}{20}$. Pour avoir $X_2 = 4$, il faut tirer deux boules 1 lors des trois premiers tirages (probabilité $\dfrac{9}{20}$, comme vu à la question précédente), puis lors du quatrième tirage, tirer la dernière boule 1 parmi les trois restantes, ce qui se produit avec probabilité $\dfrac{1}{3}$, soit finalement $P(X_2 = 4) = \dfrac{9}{20} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{20}$. De même, pour $X_2 = 5$, il faut tirer deux boules 1 et deux autres sur les quatre premiers tirages (proba $\dfrac{\binom{3}{2} \times \binom{3}{2}}{\binom{6}{4}} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$) puis tirer la boule 1 au cinquième tirage parmi les deux restantes, soit globalement $P(X_2 = 5) = \dfrac{3}{10}$. Enfin, on obtient par soustraction ou par un raisonnement direct, $P(X_2 = 6) = \dfrac{1}{2}$ (il y a une chance sur deux que la dernière boule à tirer soit une numéro 1 puisque la moitié des boules au départ sont numérotées 1). Finalement :

k	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

On peut alors calculer $E(X_2) = \dfrac{3 + 12 + 30 + 60}{20} = \dfrac{105}{20} = \dfrac{21}{4}$; puis $E(X_2^2) = \dfrac{9 + 48 + 150 + 360}{20} = \dfrac{567}{20}$, soit $V(X) = \dfrac{567}{20} - \dfrac{441}{16} = \dfrac{63}{80}$.

3. Enfin du facile, X_3 prend toutes les valeurs de 1 à 6 avec probabilité $\dfrac{1}{6}$ chacune (si vous n'êtes pas convaincus, un peu de formule des probabilités composées devrait suffire à refaire les calculs).

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Sans difficulté ici, $E(X_3) = \dfrac{7}{2}$; $E(X_3^2) = \dfrac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} = \dfrac{91}{6}$, soit $V(X_3) = \dfrac{91}{6} - \dfrac{49}{4} = \dfrac{35}{6}$.

4. On peut obtenir au minimum une somme de 3 en trois tirages, au maximum une somme de 7. Pour obtenir 3, il faut tirer les trois numéros 1, on finit par savoir que la probabilité correspondante vaut $\dfrac{1}{20}$. Pour avoir 4, il faut tirer deux 1 et un 2, ce qui donne $\dbinom{3}{2} \times \dbinom{2}{1} = 6$ tirages possibles (toujours sur 20 au total, bien entendu). Pour le 5, on peut tirer deux 1 et un 3 (trois possibilités), ou bien un 1 et les deux 2 (encore trois possibilités). Pour une somme de 6, il faut un 1, un 2 et un 3 (encore six possibilités), et il reste une unique possibilité pour le 7.

k	3	4	5	6	7
$P(X = k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{1}{20}$

Soit $E(X_4) = 5$ (la loi est symétrique) ; $E(X_4^2) = \dfrac{9 + 96 + 150 + 216 + 49}{20} = \dfrac{520}{20} = 26$ puis $V(X_4) = 26 - 25 = 1$.

5. Au mieux, la somme atteindra 5 en deux tirages (un 3 et un 2). Au pire, ce sera au quatrième tirage (après avoir tiré trois 1, on sera obligé de tirer au moins un 2 lors du quatrième tirage). La probabilité de n'avoir besoin que de deux tirages est $\dfrac{2}{\binom{6}{2}} = \dfrac{2}{15}$; au contraire, pour aller

jusqu'à 4, il faut soit tirer les trois 1 lors des trois premiers tirages, ce qui fait une proba de $\frac{1}{20}$; soit tirer deux 1 et un 2 lors des trois premiers tirages, probabilité $\frac{\binom{3}{2} \times \binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{6}{20}$. Finalement, $P(X_5 = 4) = \frac{7}{20}$. Par soustraction, il reste $P(X_5 = 3) = \frac{31}{60}$.

k	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{31}{60}$	$\frac{7}{20}$

Soit $E(X_5) = \frac{16 + 93 + 84}{60} = \frac{193}{60}$; $E(X_5^2) = \frac{32 + 279 + 336}{60} = \frac{647}{60}$ et $V(X_5) = \frac{1\ 571}{3\ 600}$.

Exercice 3 (*)

Le nombre X de lancers réussis suit une loi binomiale de paramètre $(10; 0.7)$. On a donc $P(X = k) = \binom{10}{k}(0.7)^k(0.3)^{10-k}$ et $E(X) = np = 7$. La probabilité de n'avoir aucun lancer réussi sur q tentatives vaut 0.3^q. Elle passe en-dessous de 2% lorsque $0.3^q \leqslant 0.02$, soit $q \ln 0.3 \leqslant \ln 0.02$, donc $q \geqslant \frac{\ln 0.02}{\ln 0.3} \simeq 3.25$. Il suffit donc de quatre lancers pour avoir plus de 98% de chance qu'un lancer au moins réussisse.

Exercice 4 (*)

1. Il s'agit d'un exemple standard de loi binomiale de paramètre $\left(6; \frac{2}{3}\right)$. On a donc $P(R = k) = \binom{6}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{3^{n-k}} = \binom{6}{k}\frac{2^k}{3^n}$; $E(R) = 4$ et $V(R) = 6 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. De même, la variable V suit une loi binomiale de paramètre $\left(6, \frac{1}{3}\right)$, donc $E(V) = 2$ et $V(V) = \frac{4}{3}$.
2. Sans remise, on est obligés de tirer une boule rouge au moins, donc $R(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Par ailleurs, l'événement $R = k$ est réalisé si on tire k boules rouges parmi les 10 et $6 - k$ boules vertes parmi les 5, donc $P(R = k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{5}{6-k}}{\binom{15}{6}}$. Un peu de calcul à la main (ou à la calculatrice pour les plus paresseux) permet d'obtenir $\binom{15}{6} = 5\ 005$, que les coefficients $\binom{10}{k}$ valent respectivement 10, 45, 120, 210, 252 et 210 quand k varie entre 1 et 6, et que pour ces mêmes valeurs, $\binom{5}{6-k}$ vaut 1, 5, 10, 10, 5 et 1. On peut donc dresser le magnifique tableau suivant pour la loi de R (on n'a volontairement pas simplifié les fractions) :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{10}{5\ 005}$	$\frac{225}{5\ 005}$	$\frac{1\ 200}{5\ 005}$	$\frac{2\ 100}{5\ 005}$	$\frac{1\ 260}{5\ 005}$	$\frac{210}{5\ 005}$

On en déduit que $E(R) = \frac{10 + 450 + 3\ 600 + 8\ 400 + 6\ 300 + 1\ 260}{5\ 005} = \frac{20\ 020}{5\ 005} = 4$. Belle simplification. On continue donc : $E(R^2) = \frac{10 + 900 + 10\ 800 + 33\ 600 + 31\ 500 + 7\ 560}{5\ 005} = \frac{84\ 370}{5005} = \frac{118}{7}$, puis $V(R) = \frac{118}{7} - 16 = \frac{6}{7}$. On peut s'étonner d'obtenir des résultats aussi simples, mais c'est normal puisque ce genre de variable suit une loi classique appelée loi hypergéométrique, mais dont l'étude n'est pas à votre programme.

N'oublions tout de même pas la variable V. Inutile de refaire les calculs, il suffit de se rendre compte que $V + R = 6$, donc $V = 6 - R$. On en déduit que $V(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, et

$P(V=k) = P(R=6-k) = \dfrac{\binom{10}{6-k} \times \binom{5}{k}}{\binom{15}{6}}$. On aura, d'après les propriétés de l'espérance et de la variance, $E(V) = 6 - E(R) = 2$ et $V(V) = V(R) = \dfrac{6}{7}$.

Exercice 5 (**)

On a bien évidemment $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ (quand on lance simultanément quatre dés, il est tout à fait possible que le plus grand chiffre obtenu soit 1 puisque les répétitions sont possibles). Notons également que $|\Omega| = 6^4 = 1\ 296$. Plutôt que de calculer directement la loi de X, il est beaucoup plus simple ici de calculer la probabilité des évènement A_i : « Le plus grand chiffre obtenu est inférieur ou égal à i ». En effet, cela revient à dire que chacun des quatre dés a donné un résultat inférieur ou égal à i, ou encore qu'on a i possibilités pour chaque dé. Ainsi, $P(A_6) = \dfrac{6^4}{6^4} = 1$; $P(A_5) = \dfrac{5^4}{6^4} = \dfrac{625}{1\ 296}$; $P(A_4) = \dfrac{4^4}{6^4} = \dfrac{256}{1\ 296}$; $P(A_3) = \dfrac{81}{1\ 296}$; $P(A_2) = \dfrac{16}{1\ 296}$ et enfin $P(A_1) = \dfrac{1}{1\ 296}$. Ensuite, remarquons que l'évènement $X = i$ correspond à avoir A_i réalisé (si le maximum vaut i, il est certainement inférieur ou égal à i), mais pas A_{i-1} (sinon, le maximum sera strictement inférieur à i). Chaque évènement A_{i-1} étant inclus dans A_i, on en déduit que $P(X=6) = P(A_6) - P(A_5) = \dfrac{1\ 296 - 625}{1\ 296} = \dfrac{671}{1\ 296}$, $P(X=5) = P(A_5) - P(A_4) = \dfrac{369}{1\ 296}$ etc. Soit la loi suivante :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{1\ 296}$	$\frac{15}{1\ 296}$	$\frac{65}{1\ 296}$	$\frac{175}{1\ 296}$	$\frac{369}{1\ 296}$	$\frac{671}{1\ 296}$

On a donc $E(X) = \dfrac{1 + 30 + 195 + 700 + 1\ 845 + 4\ 026}{1\ 296} = \dfrac{6\ 797}{1\ 296} \simeq 5.24$; puis $E(X^2) = \dfrac{1 + 60 + 585 + 2\ 800 + 9\ 225 + 24\ 156}{1\ 296} = \dfrac{36\ 827}{1\ 296}$, et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \simeq 0.91$ (soit $\sigma \simeq 0.95$).

Exercice 6 (***)

1. Comme l'énoncé nous l'a signalé, on aura nécessairement $X \geqslant 2$. On peut par ailleurs prendre toutes les valeurs jusqu'à n inclus (un tirage possible où $X = n$ est n ; $n-1$; . . . ; 4 ; 3 ; 1 ; 2), donc $X(\Omega) = \{2; \dots; n\}$.
2. Dans le cas où $n = 3$, il n'y a que $3! = 6$ ordres possibles pour les tirages (on considèrera qu'on mène les tirages jusqu'au bout même une fois qu'on a tiré un numéro supérieur au précédent, c'est plus simple). Parmi ces six, il y en a 3 pour lesquels le deuxième numéro est plus grand que le premier : 123 ; 132 et 231, donc $P(X=2) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$; et donc trois pour lesquels $X = 3$ (on n'aura pas nécessairement un troisième numéro plus grand que le deuxième, mais comme on n'a plus de boule à tirer il faut bien s'arrêter), donc $P(X=3) = \dfrac{1}{2}$. L'espérance correspondante vaut $\dfrac{5}{2}$.

   Dans le cas où $n = 5$, il y a $5! = 120$ tirages possibles. On aura $X = 2$ si on débute notre série de tirages par 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35 ou 45 (puis on peut tirer les trois derniers nombres dans n'importe quel ordre), soit $P(X=2) = \dfrac{10 \times 3!}{120} = \dfrac{1}{2}$. On aura $X = 3$ si on commence par 21, 31, 41, 51 (puis n'importe quoi), ou 324, 325, 423, 425, 435, 523, 524, 534, soit $P(X=3) = \dfrac{4 \times 3! + 8 \times 2!}{120} = \dfrac{1}{3}$. On aura $X = 4$, si on débute par 321, 431, 421, 541, 531, 521, et pour les tirages 43251, 54231, 53241, soit $P(X=4) = \dfrac{6 \times 2! + 3}{120} = \dfrac{1}{8}$. Enfin, on aura $X = 5$ pour les tirages 43215, 53214, 54213, 54312, et 54321, soit $P(X=5) = \dfrac{5}{120} = \dfrac{1}{24}$. On obtient cette fois-ci une espérance valant $E(X) = 2\times\dfrac{1}{2}+3\times\dfrac{1}{3}+4\times\dfrac{1}{8}+5\times\dfrac{1}{24} = \dfrac{65}{24} \simeq 2.71$.

Dans le cas général, il va bien falloir trouver une façon intelligente de faire le calcul. Supposons $X = k$, cela signifie qu'on a tiré k numéros dont les $k-1$ premiers sont apparus en ordre décroissant. Une fois qu'on sait quel est le k-ème numéro tiré, l'ordre du tirage est donc totalement imposé. Or, ce k-ème numéro tiré peut être n'importe lequel des k numéros tirés, sauf le plus petit. Ainsi, si on $X = 4$ et qu'on a tiré les numéros 1, 3, 6 et 8, on a pu tirer dans les trois ordres suivants : 8613, 8316 ou 6318. On a donc $\dbinom{n}{k}$ choix pour les numéros tirés, $k-1$ choix pour le numéro qui apparait au tirage k, et $(n-k)!$ choix pour l'ordre des tirages suivant le tirage numéro k. Conclusion $P(X=k) = \dfrac{\dbinom{n}{k}(k-1)(n-k)!}{n!} = \dfrac{k-1}{k!}$. Seule petite exception si $k = n$: il faut ajouter le cas très particulier où on a tiré tous les numéros dans le sens décroissant, ce qui représente un seul cas sur les $n!$ possibles, donc $P(X=n) = \dfrac{\dbinom{n}{n}(n-1)0!+1}{n!} = \dfrac{n}{n!}$. On peut désormais calculer l'espérance de X : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \frac{k(k-1)}{k!} + n\times\frac{n}{n!}$ (on a séparé le cas particulier signalé auparavant pour rendre le calcul plus simple), soit $E(X) = \displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{(k-2)!} + \frac{n^2}{n!} = \sum_{k=0}^{k=n-2} \frac{1}{k!} + \frac{n^2}{n!}$.

3. On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n!} = 0$, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} = e$ (c'est la somme de la série exponentielle), donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(X) = e$ (eh oui, c'est étonnant mais c'est comme ça).

Exercice 7 (**)

1. Commençons par calculer la probabilité qu'un groupe soit positif. Pour cela, il est plus simple de passer par le complémentaire : le groupe est testé négatif si tous les individus du groupe sont négatifs, ce qui se produit avec une probabilité $(1-p)^n$. Un groupe est donc positif avec une probabilité $1-(1-p)^n$. Ensuite, la loi du nombre de groupes positifs est une loi binomiale de paramètre $\left(\dfrac{N}{n}; 1-(1-p)^n\right)$ (puisqu'il y a $\dfrac{N}{n}$ groupes).

2. Dans un premier temps, on effectue $\dfrac{N}{n}$ analyses (une par groupe). Parmi celles-ci, il y en a en moyenne $(1-(1-p))^n \times \dfrac{N}{n}$ de positives (espérance de la variable aléatoire étudiée à la question précédente). Pour chaque groupe positif, on doit effectuer n analyses supplémentaires. On a donc au total en $E(Y) = \dfrac{N}{n} + (1-(1-p)^n)N$ analyses à faire.

3. Si $N = 1\ 000$, la première méthode conduit à faire 1 000 analyses. Avec la deuxième méthode, on en a en moyenne $100 + 1\ 000(1-0.99^{10}) \simeq 196$. Il est donc nettement plus avantageux de regrouper les tests !

Exercice 8 (*)

1. Puisqu'on a une probabilité $\frac{1}{2}$ à chaque saut d'effectuer un saut d'une cases, et qu'on répète l'expérience n fois, on aura $Y_n \sim \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right)$. En particulier, $E(Y_n) = \frac{n}{2}$ et $V(Y_n) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$.
2. Il suffit de constater que, si on a effectué Y_n saut d'une case, on en a effctué $n - Y_n$ de deux cases, et qu'on a donc parcouru $Y_n + 2(n - Y_n) = 2n - Y_n$ cases lors des n sauts. Autrement dit, on a tout simplement $X_n = 2n - Y_n$. On en déduit que $X_n(\Omega) = \{n; n+1; \dots; 2n\}$, que $P(X_n = k) = P(Y_n = 2n - k) = \binom{n}{2n-k} \times \frac{1}{2^n}$; puis $E(X_n) = E(2n - Y_n) = 2n - \frac{n}{2} = \frac{3n}{2}$; enfin $V(X_n) = V(2n - Y_n) = V(Y_n) = \frac{n}{4}$.

Exercice 9 (***)

1. Si $n = 0$, on a bien sûr toujours $T_n = 0$. Dans le cas contraire, il y aura toujours au moins une case non vide, et au plus n après n lancers, sachant toutefois qu'on ne peut dépasser N cases non vides dans le cas où $N < n$ donc $T_n(\Omega) = \{1; 2; \dots; min(n, N)\}$.
2. Après 1 lancer, il y aura toujours exactement une case non vide (celle dans lequel on a lancé la boule), donc $T_1 = 1$ (variable aléatoire constante). Au deuxième lancer, soit on relance dans la même case qu'au premier, et on a alors $T_2 = 1$, soit on lance dans une autre et $T_2 = 2$. La probabilité de lancer dans la même case étant $\frac{1}{N}$, on a $P(T_2 = 1) = \frac{1}{N}$, et $P(T_2 = 2) = \frac{N-1}{N}$.
3. Pour avoir $T_n = 1$, il faut avoir obtenu à chaque lancer à partir du deuxième la même case qu'au premier lancer, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{N}$ à chaque lancer, soit $P(T_n = 1) = \left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}$.

   Le nombre de tirages donnant $T_n = 2$ est obtenu en choisissant deux cases parmi les N, puis en se laissant deux possibilités à chaque tirage, et en supprimant à la fin les 2 tirages où on a tiré toujours dans la même case, soit $\binom{N}{2} \times (2^n - 2)$. Ceci est à diviser par le nombre total de tirages, qui vaut N^n, donc $P(T_n = 2) = \frac{N(N-1)(2^{n-1}-1)}{N^n}$.

   Si $n \leqslant N$, $T_n = n$ si on tombe dans une nouvelle case à chaque tirage, ce qui correspond à $N(N-1)\dots(N-n+1)$ tirages, soit $P(T_n = n) = \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{N^n} = \frac{N!}{(N-n)!N^n}$. Si $n > N$, on ne peut pas avoir n cases non vides, donc $P(T_n = n) = 0$.
4. Les évènements $T_n = k$ forment un système complet d'évènements, donc on peut écrire en utilisant la formule des probabilités totales que $P(T_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{i=n} P(T_n = i) P_{T_n = i}(T_{n+1})$. Mais parmi les probabilités conditionnelles apparaissant dans cette formule, seules deux sont non nulles : soit on avait déjà k cases non vides après n tirages et on a à nouveau tiré dans une de ces k cases (probabilité $P_{T_n=k}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}$) ; soit on en avait $k - 1$ non vides et on a tiré dans une des $N - (k-1)$ cases restantes : $P_{T_n=k-1}(T_{n+1} = k) = \frac{N-k+1}{N}$. La formule demandée est donc exacte.

5. (a) On a $G_n(1) = \sum_{k=1}^{k=n} P(T_n = k) = 1$.

   (b) Calculons : $E(T_n) = \sum_{k=1}^{k=n} kP(T_n = k)$. Or, en dérivant G_n, on obtient $G'_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} kP(T_n = k)x^{k-1}$. En remplaçant par 1, on tombe exactement sur $E(T_n)$, qui est donc égale à $G'_n(1)$.

   (c) Notons pour commencer que la formule de la question 4 reste en fait valable pour $k = n+1$, puis sommons ces égalités :
   $G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{k=n+1} P(T_{n+1} = k)x^k = \sum_{k=1}^{k=n+1} \left(\frac{k}{N}P(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}P(T_n = k-1)\right) x^k$
   $= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=n+1} kP(T_n = k)x^k + (N-k+1)P(T_n = k-1)x^k$
   $= \frac{x}{N} \sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k)x^{k-1} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=n} (N-k)P(T_n = k)x^{k+1}$
   $= \frac{x}{N}G'_n(x) + \frac{x}{N} \sum_{k=1}^{k=n} NP(T_n = k)x^k + \frac{x^2}{N} \sum_{k=1}^{k=n} kP(T_n = k)x^{k-1}$
   $= \frac{x}{N}G'_n(x) + xG_n(x) - \frac{x^2}{N}G'n(x)$, ce qui correspond bien à la formule annoncé (les indices disparaissant dans certaines sommes du calcul correspondent à des termes nuls).

   (d) Dérivons donc : $G'_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(1-2x)G'_n(x) + \frac{1}{N}(x-x^2)G''_n(x) + G_n(x) + xG'_n(x)$. En prenant $x = 1$ (ce qui a le bon goût d'annuler le terme faisant intervenir la dérivée seconde) et en réutilisant les résultats précédents, on a $E(T_{n+1}) = -\frac{1}{N}E(T_n) + 1 + E(T_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)E(T_n) + 1$.

   (e) Notons $u_n = E(T_n)$. La suite (u_n) est arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = \left(1 - \frac{1}{N}\right)x + 1$, donnant $x = N$. Posons donc $v_n = u_n - N$, alors $v_{n+1} = u_{n+1} - N = \left(1 - \frac{1}{N}\right)u_n + 1 - N = \frac{N-1}{N}u_n - (N-1) = \frac{N-1}{N}(u_n - N) = \frac{N-1}{N}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{N-1}{N}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - N = 1 - N$, donc $v_n = (1-N)\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1} = -\frac{(N-1)^n}{N^{n-1}}$. On en déduit que $u_n = N - \frac{(N-1)^n}{N^{n-1}} = \frac{N^n - (N-1)^n}{N^{n-1}} = N\left(1 - \frac{(N-1)^n}{N^n}\right) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$ va tendre vers 0, la parenthèse vers 1, et l'espérance de T_n vers N, ce qui est intuitivement normal.

Exercice 10 (***)

1. C'est une loi binomiale de paramètre (n, p). On a en particulier $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.
2. La variable Z représente le nombre total de correspondants obtenus, on a donc $Z(\Omega) = \{0; 1; \dots; n\}$.
3. On a $Z = 0$ si $X = 0$ et $Y = 0$, donc si on fait deux tours complets sans qu'un seul appel réussisse. On a donc $P(Z = 0) = (1-p)^{2n}$. Pour $Z = 1$, on a soit $X = 0$ et $Y = 1$, soit

$X=1$ et $Y=0$, et attention, les deux possibilités n'ont pas la même probabilité ! Si $X=0$ et $Y=1$, un appel a réussi parmi les n derniers, et on a fait $2n$ appels au total, soit une proba de $(1-p)^n \times \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} = npq^{2n-1}$. Pour le cas où $X=1$ et $Y=0$, un appel parmi les n premiers a réussi, et on en a retenté $n-1$ qui ont raté, soit une probabilité de $\binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} \times (1-p)^{n-1} = npq^{2n-2}$. Au total, $P(Z=1) = npq^{2n-2}(1+q)$.

4. Comme précédemment, si on a l appels réussis au total, c'est qu'on en a eu k (avec $0 \leqslant k \leqslant l$) au premier tour, et $l-k$ au second tour, autrement dit que $X=k$ et $Y=l-k$. On a donc bien $P(Z=l) = \sum_{k=0}^{k=l} P((X=k) \cap (Y=l-k))$.
5. On sait que $X=k$, il y a donc $n-k$ appels à retenter au deuxième tour. La probabilité conditionnelle $P_{X=k}(Y=h)$ est donc la probabilité de réussir h appels parmi $n-k$. Cette probabilité est non nulle si $h \in \{0; 1; \ldots; n-k\}$ et elle vaut alors $\binom{n-k}{h} p^h (1-p)^{n-k-h}$.
   On a donc $P(Z=l) = \sum_{k=0}^{k=l} P(X=k) P_{X=k}(Y=l-k) = \sum_{k=0}^{k=l} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \binom{n-k}{l-k} p^{l-k} q^{n-l} = \sum_{k=0}^{k=l} \binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k} p^l q^{2n-k-l}$.
6. Il suffit de calculer $\binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(l-k)!(n-l)!} = \frac{n!}{k!(l-k)!(n-l)!}$ et $\binom{n}{l}\binom{l}{k} = \frac{n!}{l!(n-l)!} \times \frac{l!}{k!(l-k)!} = \frac{n!}{(n-l)!k!(l-k)!}$. On peut utiliser cette égalité pour simplifier l'expression obtenue à la question précédente :
   $P(Z=l) = \sum_{k=0}^{k=l} \binom{n}{l}\binom{l}{k} p^l q^{2n-k-l} = \binom{n}{l} p^l q^{2n-2l} \sum_{k=0}^{k=l} \binom{l}{k} q^{l-k} = \binom{n}{l} p^l (1+q)^l (q^2)^{n-l}$.
7. Comme $p(1+q) = (1-q)(1+q) = 1-q^2$, on a $P(Z=l) = \binom{n}{l}(1-q^2)^l (q^2)^{n-l}$. La variable aléatoire Z suit dont une loi binomiale de paramètre $(n; 1-q^2)$.
8. La probabilité qu'un correspondant donné ne soit joint ni au premier, ni au deuxième tour vaut q^2, donc celle qu'on le joigne à un tour ou à l'autre est de $1-q^2$. Comme on répète cette expérience sur chacun des n correspondants, on est bien dans une situation de loi binômiale de paramètre $(n; 1-q^2)$.

Exercice 11 (***)

1. (a) Calculons donc : $(1-q)\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} kq^k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)q^k - \sum_{k=1}^{n} kq^k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} q^k - nq^n = 1 - nq^n + \frac{1-q^n}{1-q} - 1 = \frac{1-q^n}{1-q} - nq^n$. En particulier, $\sum_{k=1}^{n} k2^k = 2\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = \frac{2}{1-2}\left(\frac{1-2^n}{1-2} - n2^n\right) = n2^{n+1} + 2(1-2^n) = (n-1)2^{n+1} + 2$.
   (b) Puisqu'on nous donne gentiment la formule, démontrons-là par récurrence. Au rang 1, la somme vaut 2, et le membre de droite $2 \times 4 - 6 = 2$, donc ça va. Supposons la formule vraie au rang n, alors $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 2^k = \sum_{k=1}^{n} k^2 2^k + (n+1)^2 2^{n+1} = (n^2-2n+3)2^{n+1} - 6 + (n+1)^2 2^{n+1} =$

$(n^2-2n+3+n^2+2n+1)2^{n+1}-6=(2n^2+4)2^{n+1}-6=(n^2+2)2^{n+2}-6$. Il ne reste plus qu'à constater que $(n+1)^2-2(n+1)+3=n^2+2n+1-2n-2+3=n^2+2$ pour prouver la formule au rang $n+1$ et achever la récurrence.

2. (a) Il faut commencer par compter le nombre total de boules dans l'urne : $2+\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2+\frac{1-2^{n+1}}{1-2}-1=1+2^{n+1}-1=2^{n+1}$. On a donc logiquement $P(X=0)=\frac{2}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^n}$, et pour tour $k\geqslant 1$, $P(X=k)=\frac{2^k}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^{n+1-k}}$.

   (b) Calculons donc l'espérance, en oublions la valeur particulière 0 qui n'intervient de toute façon pas dans le calcul : $E(X)=\sum_{k=1}^{n} kP(X=k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k2^k}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^{n+1}}((n-1)2^{n+1}+2)=n-1+\frac{1}{2^n}$. Pour la variance, on va avoir besoin de $E(X^2)=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}k^2 2^k = n^2-2n+3-\frac{6}{2^{n+1}}$. Ensuite, on applique bien sûr la formule de König-Huygens : $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=n^2-2n+3-\left(n-1+\frac{1}{2^n}\right)^2=n^2-2n+3-n^2+2n-1-\frac{n-1}{2^{n-1}}-\frac{1}{4^n}=2+\frac{1-n}{2^{n-1}}-\frac{1}{4^n}$.

3. (a) Si $k=0$, alors $P_{X=0}(Y=0)=1$ et $P_{X=0}(Y=i)=0$ si $i\neq 0$. Plus généralement, $P_{X=k}(Y=i)=0$ si $i\geqslant k$ puisque les boules correspondantes ont été supprimées. Par contre, si $0<i<k$, $P_{X=k}(Y=i)=\frac{2^i}{2^k}=\frac{1}{2^{k-i}}$. Dernier cas, si $k\neq 0$, $P_{X=k}(Y=0)=\frac{2}{2^k}=\frac{1}{2^{k-1}}$.

   (b) On peut appliquer la formule des probabilités totales au système complet d'événements constitué des $X=k$. On obtient alors $P(Y=0)=P(X=0)\times P_{X=0}(Y=0)+\sum_{k=1}^{n}P(X=k)\times P_{X=k}(Y=0)=\frac{1}{2^n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{2^{n+1}}\times\frac{2}{2^k}=\frac{1}{2^n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^n}=\frac{n+1}{2^n}$. De même, si $i\neq 0$, $P(Y=i)=\sum_{k=i+1}^{n}P(X=k)\times P_{X=k}(Y=i)=\sum_{k=i+1}^{n}\frac{2^k}{2^{n+1}}\times\frac{2^i}{2^k}=\frac{(n-i)2^i}{2^{n+1}}=(n-i)2^{i-n-1}$.

   (c) Vérifions : $\frac{n+1}{2^n}+\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)2^{i-n-1}=\frac{n+1}{2^n}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{n-i}{2^{n-i+1}}=\frac{n+1}{2^n}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{2^{i+1}}=\frac{n+1}{2^n}+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{2^{i-1}}=\frac{n+1}{2^n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n-1}{2^{n-1}}\right)=\frac{n+1}{2^n}+1-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n-1}{2^n}=\frac{2}{2^n}+1-\frac{1}{2^{n-1}}=1$. Ouf, ça marche !

   (d) Allez, un dernier calcul : $E(Y)=\sum_{i=1}^{n-1}i(n-i)2^{i-n-1}=\frac{n}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{n-1}i2^i-\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{n-1}i^2 2^i=\frac{n}{2^{n+1}}((n-1)2^{n+1}+2)-\frac{1}{2^{n+1}}((n^2-2n+3)2^{n+1}-6)=n(n-1)+\frac{n}{2^n}-(n^2-2n+3)+\frac{3}{2^n}=n-3+\frac{n+3}{2^n}$, en exploitant les résultats des premières questions.

Exercice 12 (***)

I. Étude du cas $c = 0$.

1. On cherche à compter le nombre de boules blanches tirées lors de n tirages avec remise. La variable X suit une loi binômiale de paramètre $\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

2. On a $Y = 0$ si on tire n boules noires, donc $P(Y = 0) = \frac{1}{2^n}$. Et on a $Y = k$ si la séquence de tirages commence par $NN \dots NB$, avec $k-1$ noires au départ, ce qui a une probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$.

3. En effet, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^n} = 1$.

4. Une façon de faire est de prouver par récurrence la propriété $P_n : \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$.

   Pour $n = 1$, la somme de gauche se réduit à x, et le quotient de droite vaut $\dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^2} = \dfrac{x(x-1)^2}{(1-x)^2} = x$, donc P_1 est vraie.

   Supposons donc P_n vérifiée, on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} kx^k = \sum_{k=1}^{k=n} kx^k + (n+1)x^{n+1} = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} + (n+1)x^{n+1}$ (on a ici utilisé l'hypothèse de récurrence). Mettons tout cela au même dénominateur pour obtenir $\dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x + (n+1)x^{n+1}(1 - 2x + x^2)}{(1-x)^2}$
   $= \dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x + (n+1)x^{n+1} - 2(n+1)x^{n+2} + (n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}$
   $= \dfrac{x - (n+2)x^{n+2} + (n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}$. Ceci correspond exactement à la formule qu'on doit obtenir pour que P_{n+1} soit vérifiée, et achève donc la récurrence.

5. On applique le résultat précédent. On a $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{\frac{n}{2^{n+2}} - \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2})^2}$
   $= \dfrac{1}{2^n}\left(n - 2(n+1) + 2^{n+1}\right) = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$

II. Étude du cas $c \neq 0$.

1. Z_p est simplement le nombre de boules blanches tirées après p tirages.

2. Pour X_1, il n'y a que deux boules dans l'urne, on a $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$ et donc $E(X_1) = \frac{1}{2}$.

3. Si on suppose $X_1 = 0$, c'est-à-dire si une boule noire a été tirée au premier tirage, on se retrouve avec 1 boule blanche et $c+1$ boules noires au deuxième tirage, donc $P_{X_1=0}(X_2 = 0) = \dfrac{c+1}{c+2}$ et $P_{X_1=0}(X_2 = 1) = \dfrac{1}{c+2}$. De même, on a $P_{X_1=1}(X_2 = 0) = \dfrac{1}{c+2}$ et $P_{X_1=1}(X_2 = 1) = \dfrac{c+1}{c+2}$. On en déduit via la formule des probabilités totales (les évènements $X_1 = 0$ et $X_1 = 1$ formant un système complet d'évènements) que $P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0) \times P_{X_1=0}(X_2 = 1) + P(X_1 =$

$1) \times P_{X_1=1}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2} + \frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2} = \frac{1}{2}$. De même, $P(X_2 = 0) = \frac{1}{2}$. La loi de X_2 est donc la même que celle de X_1, et $E(X_2) = \frac{1}{2}$.

4. On a $Z_2(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ et $P(Z_2 = 0) = P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) = P(X_1 = 0) \times P_{X_1=0}(X_2 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2} = \frac{c+1}{2(c+2)}$; $P(Z_2 = 1) = P(X_1 = 1) \times P_{X_1=1}(X_2 = 0) + P(X_1 = 0) \times P_{X_1=0}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{c+2} = \frac{1}{c+2}$; $P(Z_2 = 2) = \frac{c+1}{2c+4}$.
5. On a bien sûr $Z_p(\Omega) = \{1; 2; \dots; p\}$.
6. (a) Si on fait l'hypothèse que $Z_p = k$, on a donc tiré k boules blanches lors des p premiers tirages, et par conséquent $p-k$ boules noires lors de ces même tirages. On a donc ajouté à k reprises c boules blanches dans l'urne, ce qui nous fait un total de $kc+1$ boules blanches dans l'urne avant le tirage numéro $p+1$ (il y en avait une au départ). De même, on a ajouté $p-k$ fois c boules noires et on se trouve avec $(p-k)c+1$ boules noires. Soit un total de $kc+1+(p-k)c+1 = pc+2$ boules dans l'urne, ce qui est tout à fait normal puisqu'on avait deux boules au départ et qu'on en ajoute p à chaque tirage. La probabilité de tirer une boule blanche au tirage $p+1$ vaut alors $P_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1) = \frac{kc+1}{pc+2}$.

   (b) Les évènements $Z_p = 0$; $Z_p = 1$; $\dots$; $Z_p = p$ forment un système complet d'évènements. On peut alors appliquer la formule des probabilités totales puis exploiter le calcul de la question précédente pour écrire : $P(X_{p+1} = 1) = \sum_{k=0}^{k=p} P(Z_p = k) \times P_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1) = \sum_{k=0}^{k=p} \frac{kc+1}{pc+2} P(Z_p = k) = \frac{c}{pc+2} \sum_{k=0}^{k=p} kP(Z_p = k) + \frac{1}{pc+2} \sum_{k=0}^{k=p} P(Z_p = k) = \frac{cE(Z_p)}{pc+2} + \frac{1}{pc+2}$ (la dernière somme étant nulle car elle représente la somme des probabilités d'une loi de probabilité).

   (c) Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : $P(X_1 = 1) = P(X_2 = 2) = \dots = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$. La propriété est vraie au rang 1 (on l'a constaté en début de problème), supposons la vérifiée au rang n. On en déduit que $E(Z_p) = E(\sum_{k=1}^{k=n} X_k) = \sum_{k=1}^{k=n} E(X_k) = \frac{n}{2}$, puis en utilisant le résultat de la question précédente que $P(X_{n+1} = 1) = \frac{c\frac{n}{2}+1}{nc+2} = \frac{1}{2}$, ce qui achève la récurrence.