Feuille d'exercices n°19 : Variables aléatoires

PTSI B Lycée Eiffel

13 mai 2016

Exercice 1 (*)

On joue au jeu suivant : on parie sur un nombre compris entre 1 et 6, puis on lance trois dés et on gagne 3 euros si le nombre sort 3 fois, 2 euros s'il sort deux fois, 1 euro s'il sort une fois. On perd 1 euro s'il ne sort pas. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable X représentant le gain du joueur.

Exercice 2 (* à **)

Dans une urne se trouvent six boules. Trois sont numérotées 1, deux sont numérotées 2 et la dernière est numérotée 3. On effectue des tirages successifs sans remise de toutes les boules de l'urne. Pour chacune des variables aléatoires suivantes, déterminer la loi, l'espérance et la variance :

1. X_1 est le nombre de boules numérotées 1 présentes dans l'urne à l'issue du troisième tirage.
2. X_2 est le nombre de tirages nécessaires avant de ne plus avoir de boules numérotées 1 dans l'urne.
3. X_3 est le rang du tirage de la boule numérotée 3.
4. X_4 est la somme des numéros tirés lors des trois premiers tirages.
5. X_5 est le nombre de tirages nécessaires avant que la somme des numéros obtenus n'atteigne (ou dépasse) 5.

Exercice 3 (*)

On lance des fusées vers Saturne. À chaque lancer, la probabilité de réussite est de 0.7. On effectue dix lancers successifs, quelle est la probabilité d'obtenir k lancers réussis ? Quel est le nombre moyen de lancers réussis ? Combien faudrait-il de lancers pour avoir 98% de chances qu'au moins un lancer ait réussi ?

Exercice 4 (*)

Dans une urne se trouvent 10 boules rouges et 5 vertes.

1. On pioche avec remise six boules dans l'urne et on note R le nombre de boules rouges obtenues et V le nombre de vertes. Donner la loi, l'espérance et la variance de R et de V (pas de calcul !).
2. Même question lorsque les tirages sont effectués sans remise (là il va falloir du calcul !).

Exercice 5 (**)

On lance simultanément quatre dés à 6 faces et on note X le plus grand chiffre obtenu. Déterminer la loi de X (on pourra commencer par calculer les probabilités $P(X \leqslant k)$, ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 6 (***)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages sans remise dans cette urne jusqu'à ce que le numéro tiré ait un numéro supérieur ou égal au numéro tiré juste avant (ce qui suppose qu'on effectue au moins deux tirages ; par exemple une suite de tirage possible est 7, 4, 2, 5 et on s'arrête après ce quatrième tirage). On note X le nombre de tirages effectués.

1. Quels sont les valeurs prises par la variable X ?
2. Déterminer la loi de X puis son espérance (on pourra commencer par traiter les cas $n = 3$ et $n = 5$).
3. Quelle est la limite de $E(X)$ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 7 (**)

On désire analyser le sang d'une population de N individus pour détecter la présence d'un virus qui affecte les individus de la population avec une probabilité p. On a pour cela deux possibilités : soit on analyse le sang de chaque personne ; soir on regroupe les personnes en groupes de n, dont on analyse le sang en groupe. Si le test du groupe est positif, on analyse individuellement chaque individu du groupe.

1. On note X le nombre de groupes positifs. Donner la loi de X.
2. On note Y le nombre total d'analyses effectuées avec la seconde méthode. Calculer en fonction de N, n et p l'espérance de Y.
3. Comparez les deux méthodes dans le cas où $N = 1000$, $n = 10$ et $p = 0.01$.

Exercice 8 (*)

Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0; 1; \dots; k$, de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut. Au départ, elle est sur la case 0. Soit X_n le numéro de la case occupée par la puce après n sauts et Y_n le nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de Y_n.
2. En déduire celles de X_n.

Exercice 9 (***)

Un joueur lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N (avec $N \geqslant 2$), chaque boule ayant probabilité $\frac{1}{N}$ de tomber dans chacune des N cases (et les tirages de boules étant indépendants les uns des autres). On cherche à étudier la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases **non** vides après n lancers.

1. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs prises par T_n.
2. Donner les lois de T_1 et de T_2.
3. Déterminer, lorsque $n \geqslant 2$, les probabilités $P(T_n = 1)$, $P(T_n = 2)$ et $P(T_n = n)$ (en distingant suivant que $n \leqslant N$ ou $n > N$).
4. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que si $1 \leqslant k \leqslant n$, alors $P(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N} P(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N} P(T_n = k-1)$.
5. On considère dans cette question le polynôme $G_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} P(T_n = k) x^k$.

(a) Quelle est la valeur de $G_n(1)$?

(b) Exprimer $E(T_n)$ en fonction de $G'_n(1)$.

(c) En utilisant la relation démontrée à la question 4, montrer que $G_{n+1}(x) = \dfrac{1}{N}(x - x^2)G'_n(x) + xG_n(x)$.

(d) Dériver l'expression précédente et en déduire que $E(T_{n+1}) = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) E(T_n) + 1$.

(e) En déduire la valeur de $E(T_n)$ et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 10 (***)

Une secrétaire effectue n appels pour tenter de joindre n correspondants distincts. Pour chaque appel, elle a une probabilité p d'obtenir son correspondant, et $q = 1 - p$ de ne pas le joindre.

1. On note X le nombre de correspondants obtenus. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.
2. La secrétaire tente une deuxième fois de joindre les $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre la première fois. On note Y le nombre de correspondants joints à la deuxième tentative, et $Z = X + Y$. Quelles sont les valeurs que peut prendre Z ?
3. Calculer $P(Z = 0)$ et $P(Z = 1)$ (pour cette dernière probabilité, on doit obtenir $npq^{2n-2}(1 + q)$).
4. Démontrer que $P(Z = l) = \displaystyle\sum_{k=0}^{l} P((X = k) \cap (Y = l - k)$.
5. Calculer $P_{X=k}(Y = h)$ pour les valeurs de k et h pour lesquelles cela a un sens, en déduire $P(Z = l)$.
6. Montrer que $\dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{l-k} = \dbinom{n}{l}\dbinom{l}{k}$. En déduire que $P(Z = l) = \dbinom{n}{l} p^l (1 + q)^l (q^2)^{n-l}$.
7. En constatant que $p(1 + q) = 1 - q^2$, reconnaitre la loi suivie par Z.
8. Retrouver ce résultat en calculant la probabilité qu'un correspondant donné soit joint à l'issue des deux appels.

Exercice 11 (***)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On place dans une urne 2 boules numérotées 0 ainsi que 2^kboules numérotées k pour toutes les valeurs de k comprises entre 1 et n.

1. (a) Calculer $(1 - q)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$.

   (b) Montrer que pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 2^k = (n^2 - 2n + 3)2^{n+1} - 6$
2. On tire une boule au hasard dans l'urne, et on note X le numéro de la boule tirée.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de X (on distinguer $X = 0$ des autres valeurs).

   (b) Calculer l'espérance et la variance de X.
3. On définit une seconde variable aléatoire Y de la façon suivante : si $X = 0$ alors $Y = 0$, sinon on enlève de l'urne après le premier tirage toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal à k (où k est la valeur prise par X), et on effectue un second tirage, Y étant le numéro obtenu lors de ce second tirage.

   (a) Déterminer pour k et i compris 0 et n la probabilité conditionnelle, $p(Y = i/X = k)$ (on distinguera des cas si nécessaire).

(b) En déduire la loi de probabilité de Y.

(c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} p(Y = i) = 1$.

(d) Calculer l'espérance de Y.

Exercice 12 (***)

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules supplémentaires de la couleur de la boule tirée (c étant évidemment un entier naturel). On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n > 2$).

I.Étude du cas $c = 0$.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire égale au numéro du premier tirage pour lequel on obtient une boule blanche (si on ne tire que des boules noires, on posera $Y = 0$).

1. Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. Déterminer la loi de Y (on séparera le calcul de $P(Y = 0)$).
3. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} P(Y = k) = 1$.
4. Montrer que, pour $x \neq 1$ et $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$.
5. En déduire $E(Y)$.

II. Étude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ indicatrices des événements « On tire une boule blanche au i-ème tirage ». On définit ensuite, pour p compris entre 2 et n, la variable Z_p par $Z_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=p} X_i$.

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et son espérance.
3. Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{X_1=0}(X_2 = 0)$; $P_{X_1=0}(X_2 = 1)$; $P_{X_1=1}(X_2 = 0)$ et $P_{X_1=1}(X_2 = 1)$. En déduire la loi de X_2 ainsi que son espérance.
4. Déterminer la loi de Z_2.
5. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable Z_p.
6. Soit $p \leqslant n - 1$:
   (a) Déterminer $P_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1)$.
   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $P(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}$.
   (c) En déduire, par un raisonnement par récurrence, que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.