Feuille d'exercices n°3 : Trigonométrie

PTSI B Lycée Eiffel

22 septembre 2015

Vrai/Faux

On doit être capable de répondre correctement et sans hésiter à toutes ces questions, même un an après avoir suivi le cours correspondant.

1. La fonction tangente est périodique de période 2π.
2. Une des formules de duplication peut s'écrire $\sin(2x) = \sin^2(x) - \cos^2(x)$.
3. Les réels vérifiant $\sin(x) = \frac{1}{2}$ sont de la forme $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.
4. La fonction arccos est définie sur l'intervalle $[0, \pi]$.
5. La fonction arctan a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Exercice 1 (*)

À l'aide des formules d'addition et de duplication, déterminer les valeurs des lignes trigonométriques des angles $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{24}$.

Exercice 2 (** à ***)

Résoudre les équations suivantes :

1. $\tan(2x) = 1$
2. $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$
3. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
4. $\sin(3x)\cos^3(x) + \sin^3(x)\cos(3x) = \frac{3}{4}$
5. $\arcsin(x) = \arccos(2x)$

Exercice 3 (**)

Exprimer, pour un réel x pour lequel cela a un sens, $\tan(4x)$ en fonction de $\tan(x)$. En déduire que $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ (cette formule, connue sous le nom de formule de Machin, permit au mathématicien du même nom de déterminer les 100 premières décimales du nombre π au début du 18ème siècle).

Montrer par le même type de méthode que $\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$.

Exercice 4 (***)

Étudier et tracer les courbes des fonctions suivantes :

- $f(x) = \sin(x) + \sin(2x)$
- $g(x) = \arccos(\cos(3x))$
- $h(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x)$
- $i(x) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$

Exercice 5 (**)

1. À l'aide de considérations géométriques, montrer que, $\forall h \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin(h) \leqslant h \leqslant \tan(h)$.
2. En déduire que, sous les mêmes hypothèses, $h\cos(h) \leqslant \sin(h) \leqslant h$, puis calculer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h}$.
3. En déduire les limites quand h tend vers 0 de $\dfrac{\sin^2(h)}{h}$, puis de $\dfrac{1-\cos(h)}{h}$.
4. Retrouver à partir de ce dernier résultat la formule donnant la dérivée de la fonction cos.
5. Démontrer de même que la dérivée de la fonction sin est la fonction cos.

Exercice 6 (**)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(x) - 2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Exprimer f plus simplement en vous aidant d'un calcul de dérivée.
3. Retrouver ce même résultat à partir de manipulation trigonométriques en faisant intervenir une variable θ telle que $x = \cos(\theta)$.

Exercice 7 (***)

Pour tout entier naturel n, on pose $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

1. Préciser le domaine de définition de la fonction T_n.
2. Calculer $T_n(1)$, $T_n(0)$ et $T_n(-1)$.
3. Posons $g(x) = T_n(\cos(x)) - \cos(nx)$ pour tout x réel. Que vaut $g(x)$ pour $x \in [0, \pi]$? Quelle est la parité de g ? Sa périodicité ? En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
4. Montrer que $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$ et $T_3(x)$ sont des polynômes en x, que l'on précisera.
5. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\cos((n+2)a) = 2\cos((n+1)a)\cos(a) - \cos(na)$.
   (b) En déduire que pour $x \in [-1, 1]$, $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$.
   (c) Retrouver ainsi l'expression de $T_3(x)$, puis calculer $T_4(x)$ et $T_5(x)$.
6. Démontrer que les solutions de l'équation $T_n(x) = 0$ sont les réels $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, avec k entre 0 et $n-1$.

Problème (***)

I. Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Cette première partie présente deux méthodes de calcul de la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Les deux questions sont complètement indépendantes l'une de l'autre. Pour tout l'exercice, on pose $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

1. (a) Exprimer, pour un réel x quelconque, $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$.
   (b) En déduire que α est solution de l'équation $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0$.
   (c) En trouvant deux racines évidentes à cette équation (l'un des deux n'est pas un nombre entier), factorisez-là.
   (d) Déterminer la valeur exacte de α.
2. (a) Démontrer la formule $\cos(x) + \cos(3x) = \dfrac{\sin(4x)}{2\sin(x)}$ (quand cela a un sens).
   (b) En déduire la valeur de $\alpha + \cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$.
   (c) Calculer $\alpha \times \cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$ (on doit obtenir une valeur rationnelle simple).
   (d) En déduire une équation du second degré vérifiée par α, et sa valeur exacte (on rappelle que deux nombres dont la somme vaut S et le produit P sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$).

II. Même chose avec $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$!

Pour tous réels a et h, et pour tout entier n, on pose $C_n(a,h) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kh)$ et $S_n(a,h) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + kh)$. On note par ailleurs pour la suite de l'exercice $\theta = \dfrac{\pi}{17}$.

1. Calculer ces deux sommes dans le cas où $\sin\dfrac{h}{2} = 0$.
2. Dans le cas contraire, prouver que $C_n(a,h) = \dfrac{\sin\frac{nh}{2}\cos\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}$ et $S_n(a,h) = \dfrac{\sin\frac{nh}{2}\sin\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}$ (le plus rapide est de passer par les nombres complexes, mais on peut aussi s'en sortir par récurrence).
3. On pose $x_1 = \cos(3\theta)+\cos(5\theta)+\cos(7\theta)+\cos(11\theta)$ et $x_2 = \cos\theta+\cos(9\theta)+\cos(13\theta)+\cos(15\theta)$. Montrer que $x_1 > 0$.
4. Calculer la somme $x_1 + x_2$ (assez facile).
5. Calculer le produit x_1x_2 (beaucoup plus pénible, n'hésitez pas à faire des calculs violents).
6. En déduire les valeurs exactes de x_1 et de x_2.
7. On pose maintenant $y_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta)$; $y_2 = \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$; $y_3 = \cos\theta + \cos(13\theta)$ et $y_4 = \cos(9\theta) + \cos(15\theta)$. Calculer les produits y_1y_2 et y_3y_4.
8. En déduire les valeurs exactes de y_1, y_2, y_3 et y_4.
9. Calculer le produit $\cos\theta\cos(13\theta)$ et en déduire une méthode pour obtenir une valeur exacte de $\cos\theta$ (pour les plus ~~masochistes~~ courageux, finir les calculs et donner cette valeur).