

Feuille d'exercices n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

11 décembre 2015

Vrai-Faux

1. Vrai, elle est minorée par le plus petit des termes précédant le rang à partir duquel elle est croissante (c'est-à-dire que si, par exemple, (u_n) est croissante à partir du rang 1000, la suite sera minorée par le plus petit des termes parmi $u_0, u_1, \dots, u_{1000}$; en effet, tous les termes suivants seront de toute façon plus grands que u_{1000}).
2. Faux, par exemple $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0 mais $u_{n+1} - u_n$ change de signe en permanence.
3. C'est également faux, on peut par exemple prendre $u_n = n^2$ si n est pair, et $u_n = (n-1)^2 - 1$ si n est impair. La suite n'est pas croissante à partir d'un certain rang puisque chaque terme d'indice impair est plus petit que le terme d'indice pair qui le précède, et pourtant elle diverge vers $+\infty$.
4. C'est tout à fait faux, par exemple la suite utilisée dans la question précédente a des valeurs toujours plus grandes que $n-2$ (je vous laisse le vérifier) qui est une suite croissante.
5. Faux, par exemple $(-1)^n$ ne converge pas alors que sa valeur absolue est constante égale à 1 (et donc convergente).
6. Vrai, dire que $|u_n - 0| < \varepsilon$ est la même chose que $|u_n| - 0 < \varepsilon$.

Exercice 1 (**)

- Soit donc un réel $M > 0$ (si $M \leq 0$, il suffit de prendre $n_0 = 2$ pour que la définition de la limite soit vérifiée). On aura $n^2 - 2n > M$ dès que (ce n'est pas une équivalence) $n - 2 > \sqrt{M}$ (puisque alors $n > \sqrt{M}$, et $n^2 = n(n-2) > M$). Il suffit donc de prendre $n_0 = \text{Ent}(2 + \sqrt{M}) + 1$ pour satisfaire la définition de la limite infinie.
- Soit $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{2n+3} < \varepsilon$ si $2n+3 > \frac{1}{\varepsilon}$, soit $n > \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{3}{2}$, il suffit donc de prendre un n_0 strictement supérieur à cette quantité (je vous épargne le coup de la partie entière augmentée d'un) pour satisfaire à la définition de la limite nulle.
- Soit $\varepsilon > 0$, on calcule $\frac{2n-1}{n+1} - 2 = \frac{-3}{n+1}$. On aura donc $\left| \frac{2n-1}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon$ si $\frac{3}{n+1} < \varepsilon$, soit $n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$, ce qui donne facilement une valeur de n_0 convenable.
- Soit $M > 0$ (si $M \leq 0$, encore une fois, ce n'est pas trop dur de rendre $\sqrt{n+3}$ plus grand que M). On aura $\sqrt{n+3} > M$ dès que $n > M^2 - 3$. Il suffit donc de prendre $n_0 = \text{Ent}(M^2 - 3) + 1$.

Exercice 2 (* à **)

- On peut écrire $u_n = \frac{3^n}{4^n} - \frac{2^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$. La suite est donc une différence de deux suites géométriques dont les raisons sont comprises entre -1 et 1 . Ces deux suites convergent donc vers 0, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- On peut développer : $u_n = 2e^{-n} - ne^{-n}$. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$, donc le premier terme de la différence tend vers 0. Le deuxième peut s'écrire sous la forme $\frac{n}{e^n}$, c'est un cas d'école de croissance comparée, il tend également vers 0. Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Pour un quotient de polynôme, vous êtes autorisés à utiliser la règle du quotient des termes de plus haut degré : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$.
- Utilisation de la quantité conjuguée très conseillée pour ce calcul :

$$u_n = \frac{(\sqrt{n^2 - 1} - n)(\sqrt{n^2 - 1} + n)}{\sqrt{n^2 - 1} + n} = \frac{n^2 - 1 - n^2}{\sqrt{n^2 - 1} + n} = \frac{-1}{\sqrt{n^2 - 1} + n}$$
Le dénominateur de cette fraction ayant clairement pour limite $+\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- La principale difficulté est la manipulation des factorielles : $u_n = \frac{n! \times (n+1) \times (n+2)}{(n^2+1) \times n!} = \frac{(n+1)(n+2)}{n^2+1} = \frac{n^2+3n+2}{n^2+1}$. Reste à utiliser la règle des termes de plus haut degré pour obtenir $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
- Il faut simplement faire les choses méthodiquement. D'un côté, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2n}} = e^0 = 1$; de l'autre côté, en utilisant la règle des termes de plus haut degré, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n} = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) = \ln(1) = 0$. Il ne reste plus qu'à additionner les deux termes pour obtenir $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
- On peut factoriser si on le souhaite numérateur et dénominateur par n , mais le plus simple reste sûrement d'encadrer le quotient en utilisant que $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(n) \leq 1$. On obtient ainsi, $\forall n \geq 2$, $\frac{n-1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n-1}$, soit $1 - \frac{2}{n+1} \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n-1}$. Les deux membres extrêmes de l'encadrement ayant la même limite 1, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
- Revenons à la définition du sinus hyperbolique : $u_n = \frac{e^{2n} - e^{-2n}}{2} - (e^n - e^{-n}) = e^n \left(\frac{e^n}{2} - 1 \right) - \frac{e^{-2n}}{2} + e^{-n}$. Une simple application des règles de calcul sur les sommes et produits de limite permet alors d'obtenir $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Pour celle-ci, difficile de s'en sortir sans équivalents, ou du moins sans une utilisation subtile des taux d'accroissement : comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\pi^2}{n^2} = 1$, on peut dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{\pi^2}{n^2}) - \ln(1)}{1 + \frac{\pi^2}{n^2}} = \ln'(1) = 1$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln\left(1 + \frac{\pi^2}{n^2}\right) = \pi^2$. Or, $n \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\pi^2}{n^2}\right)} = \sqrt{n^2 \ln\left(1 + \frac{\pi^2}{n^2}\right)}$, donc tout ce qui se trouve dans l'arctangente définissant u_n a pour limite $\frac{\sqrt{\pi^2}}{4} = \frac{\pi}{4}$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \arctan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Exercice 3 (**)

Les deux conditions peuvent se traduire de la façon suivante : $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = q$, et $2b - a = 3c - 2b = q$. La première relation revient à dire que $b = aq$ et $c = bq = aq^2$, d'où en remplaçant dans la deuxième donne $2aq - a = 3aq^2 - 2aq (= q)$, d'où $3aq^2 - 4aq + a = 0$, soit en factorisant par a qui est supposé non nul $3q^2 - 4q + 1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et

admet deux racines réelles $q_1 = \frac{4+2}{6} = 1$, et $q_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$. Si $q = 1$, la condition $2aq - a = q$ donne $a = 1$, puis $b = aq = 1$ et $c = bq = 1$; et si $q = \frac{1}{2}$, on obtient $\frac{2}{3}a - a = \frac{1}{2}$, soit $a = -\frac{3}{2}$, puis $b = \frac{1}{3}a = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{3}b = -\frac{1}{6}$. Les deux seules possibilités sont donc d'avoir $a = b = c = q = 1$ (auquel cas les trois termes consécutifs de la suite géométrique sont 1, 1 et 1, et les trois termes consécutifs de la suite arithmétique sont 1, 2 et 3); ou $q = \frac{1}{3}$, donc $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ et $c = -\frac{1}{6}$ (auquel cas les trois termes consécutifs de la suite géométrique sont $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{6}$, et les trois termes consécutifs de la suite arithmétique sont $-\frac{3}{2}$, -1 et $-\frac{1}{2}$).

Exercice 4 (*)

1. La suite (u_n) est arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = 4x - 6$, ce qui donne $x = 2$. On pose donc $v_n = u_n - 2$, et on vérifie que la suite auxiliaire est géométrique : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 4u_n - 6 - 2 = 4u_n - 8 = 4(u_n - 2)$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 4, et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -1$. On a donc $v_n = -4^n$, puis $u_n = v_n + 2 = 2 - 4^n$.
2. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 3x + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $r = \frac{3+1}{2} = 2$ et $s = \frac{3-1}{2} = 1$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = \alpha 2^n + \beta$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $u_0 = \alpha + \beta = 0$ et $u_1 = 2\alpha + \beta = 1$. En soustrayant les deux équations on obtient $\alpha = 1$, puis $\beta = -\alpha = -1$, donc $u_n = 2^n - 1$.
3. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 6x + 9 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 36 - 36 = 0$, et admet une racine double $r = \frac{6}{2} = 3$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = (\alpha + \beta n)3^n$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $u_0 = \alpha \times 3^0 = 0$ et $u_1 = (\alpha + \beta) \times 3^1 = 1$. La première équation donne $\alpha = 0$, puis la deuxième donne $\beta = \frac{1}{3}$, d'où $u_n = \frac{1}{3}n3^n = n3^{n-1}$ (formule valable seulement si $n \geq 1$).
4. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$ et admet donc pour racines $r_1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$ (qui était aussi une racine évidente), et $r_2 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$. On peut donc écrire $u_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Avec les conditions initiales données, $u_0 = \alpha + \beta = 1$ et $u_1 = \alpha - \frac{1}{2}\beta = 2$, donc $\frac{3}{2}\beta = -1$, soit $\beta = -\frac{2}{3}$ puis $\alpha = \frac{5}{3}$. On conclut que $u_n = \frac{5}{3} + \frac{1}{3(-2)^{n-1}}$.

Autre méthode, posons donc $v_n = u_{n+1} - u_n$, alors $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2} - u_{n+1} = \frac{u_n - u_{n+1}}{2} = -\frac{1}{2}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_1 - u_0 = 1$, donc $v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. On en déduit que $u_{n+1} = u_n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier n . On peut alors écrire $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$ (si ça ne vous semble pas clair, faites une belle récurrence), donc $u_n = 1 + \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{3} \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{5}{3} + \frac{1}{3(-2)^{n-1}}$. On retrouve bien sûr la même expression.

5. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $3x^2 - 4x + 1 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 16 - 12 = 4$, et qui admet donc deux racines $r = \frac{4+2}{6} = 1$, et $s = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$. On en déduit la forme générale de la suite : $u_n = \alpha + \frac{\beta}{3^n}$. En utilisant les valeurs des deux premiers termes, on a $u_0 = \alpha + \beta = 2$ et $u_1 = \alpha + \frac{1}{3}\beta = \frac{10}{3}$. En soustrayant les deux équations, on obtient $\frac{2}{3}\beta = 2 - \frac{10}{3} = -\frac{4}{3}$, soit $\beta = -2$, puis $\alpha = 4$. On a finalement $u_n = 4 - \frac{2}{3^n}$.
6. Considérons d'abord la suite (v_n) pour laquelle $v_0 = 1, v_1 = 11, v_2 = 111$ etc. Une façon de la décrire est de dire que $v_0 = 1$ et que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 10v_n + 1$ (en effet, quand on multiplie par 10, on ajoute un 0 à la fin, et en ajoutant 1 on le transforme en 1). Autrement dit, la suite (v_n) est arithmético-géométrique. Son équation de point fixe $x = 10x + 1$ a pour solution $x = -\frac{1}{9}$. On pose donc $w_n = v_n + \frac{1}{9}$, la suite (w_n) devrait être géométrique, ce qu'on vérifie sans peine : $w_{n+1} = v_{n+1} + \frac{1}{9} = 10v_n + 1 + \frac{1}{9} = 10\left(v_n + \frac{1}{9}\right) = 10w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique de raison 10 et de premier terme $w_0 = v_0 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$. Autrement dit, $w_n = \frac{10^{n+1}}{9}$, et $v_n = w_n - \frac{1}{9} = \frac{10^{n+1} - 1}{9}$. Reste à calculer u_n , c'est-à-dire à calculer les sommes partielles de la suite (v_n) : $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{9} \sum_{k=0}^{n-1} 10^{k+1} - 1 = \frac{10}{9} \times \frac{1 - 10^n}{1 - 10} - \frac{n-1}{9} = \frac{10^n - 1}{81} - \frac{n-1}{9}$.
7. Séparons donc parties réelle et imaginaire en posant $z_n = a_n + ib_n$. On peut alors écrire $a_0 = 0, b_0 = 2$, et pour tout entier $n, a_{n+1} + ib_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + 2ib_n - a_n + ib_n) = \frac{1}{3}a_n + ib_n$. Autrement dit, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$ et $b_{n+1} = b_n$. La suite (b_n) est donc constante égale à 2, et la suite (a_n) géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 0. Ah ben en fait on a donc toujours $z_n = 2i$ (c'était bien la peine de se fatiguer).

Exercice 5 (**)

Notons donc $v_n = u_n + an^2 + bn + c$, alors $v_{n+1} = u_{n+1} + a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 2u_n + 2n^2 - n + an^2 + 2an + a + bn + b + c = 2u_n + (a+2)n^2 + (2a+b-1)n + a+b+c$. Pour que (v_n) soit géométrique, on doit avoir $v_{n+1} = qv_n = qu_n + aqn^2 + bqn + cq$. Il est nécessaire d'avoir $q = 2$, et en identifiant ensuite les coefficients des deux formules obtenues, on a $a+2 = 2a, 2a+b-1 = 2b$ et $a+b+c = 2c$, ce qui donne successivement $a = 2$, puis $b = 2a - 1 = 3$, et enfin $c = a + b = 5$. Avec ces valeurs, la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 + a \times 0^2 + b \times 0 + c = 2 + 5 = 7$. Conclusion de ces calculs : $v_n = 7 \times 2^n$, puis $u_n = v_n - an^2 - bn - c = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$.

Exercice 6 (**)

1. La suite (u_n) est une suite récurrente. Nous n'avons malheureusement pas encore vu en classe comment traiter ce genre de suite de façon systématique, on va donc s'en sortir avec les moyens du bord. Cherchons à déterminer sa monotonie : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{a}{2u_n} - u_n = \frac{a}{2u_n} - \frac{1}{2}u_n = \frac{a - u_n^2}{2u_n} = \frac{(\sqrt{a} - u_n)(\sqrt{a} + u_n)}{2u_n}$. Une récurrence triviale permet de prouver que tous les termes de la suite sont positifs : c'est vrai pour u_0 par hypothèse, et si $u_n > 0, a$ étant lui-même positif, u_{n+1} le sera également. Le facteur $\sqrt{a} + u_n$ est donc aussi positif, et le signe

de $u_{n+1} - u_n$ ne dépend que de la position de u_n par rapport à \sqrt{a} . Posons donc pour nous aider $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{a}{2x}$ (de façon à avoir $f(u_n) = u_{n+1}$). La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} , de dérivée $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2} = \frac{x^2 - a}{2x^2}$. Cette dérivée s'annule en \sqrt{a} , la fonction f y admet un minimum de valeur $f(\sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{a}$. On en déduit que, $\forall x > 0$, $f(x) \leq \sqrt{a}$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) \leq \sqrt{a}$, et $u_{n+1} - u_n$ est donc nécessairement négatif à partir du rang 1 (pour $n = 0$, cela dépend de la valeur choisie). La suite est donc décroissante à partir du rang 1. Étant minorée par 0, elle converge nécessairement vers un réel l . Revenons à la relation de récurrence pour déterminer l : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}u_n + \frac{a}{2u_n} = \frac{1}{2}l + \frac{a}{2l}$, donc on doit avoir $l = \frac{l}{2} + \frac{a}{2l}$ (notons au passage que l ne peut pas être nulle, sinon u_{n+1} ne converge plus), soit $2l^2 = l^2 + a$, donc $l = \sqrt{a}$ (impossible que la limite soit négative). Conclusion : la suite (u_n) converge vers \sqrt{a} .

- Calculons donc $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2}u_n + \frac{a}{2u_n} - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}u_n + \frac{a}{2u_n} + \sqrt{a}} = \frac{u_n^2 + a - 2\sqrt{a}u_n}{u_n^2 + a + 2\sqrt{a}u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{(u_n + \sqrt{a})^2} = v_n^2$. On peut alors prouver par récurrence que $v_n = v_0^{(2^n)}$. En effet, c'est trivialement vrai pour $n = 0$, et si on le suppose au rang n , alors $v_{n+1} = v_n^2 = (v_0^{(2^n)})^2 = v_0^{(2 \times 2^n)} = v_0^{(2^{n+1})}$, la propriété est donc vraie au rang $n + 1$ et la récurrence fonctionne.
- D'après la question précédente, $u_n - \sqrt{a} = v_0^{2^n} (u_0 + \sqrt{a})$ (même pas besoin de majoration, on a la valeur exacte). Pour $a = 2$, et par exemple $u_0 = 1$ (sans valeur de u_0 , l'application numérique est impossible), on a $u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{1 + \sqrt{2}} \right)^{2^n} \times (1 + \sqrt{2})$ (on a changé le signe dans la puissance pour prendre la valeur absolue). Il suffit donc de prendre un n pour lequel $2^n \ln \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right) \geq -100 \ln(10) - \ln(1 + \sqrt{2})$, ce qui donne $2^n \geq 132$, soit $n \geq 8$ (encore un coup de \ln si on veut être très précis). Il suffit donc de prendre le terme d'indice huit de la suite pour avoir une valeur approchée de la limite correcte à 10^{-100} près !

Exercice 7 (***)

- Commençons donc par prouver la croissance de f sur \mathbb{R}_+^* . On a $f(x) = x \ln \frac{x+a}{x} = x \ln(x+a) - x \ln x$, donc $f'(x) = \ln(x+a) + \frac{x}{x+a} - \ln x - 1$, et $f''(x) = \frac{1}{x+a} + \frac{x+a-x}{(x+a)^2} - \frac{1}{x} = \frac{x(x+a) + ax - (x+a)^2}{x(x+a)^2} = \frac{-a^2}{x(x+a)^2} < 0$. La fonction f' est donc strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* . Or, $f'(x) = \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right) + \frac{x}{x+a} - 1$ a pour limite 0 en $+\infty$ (en effet, ce qui se trouve dans le \ln a pour limite 1 donc le terme avec le \ln tend vers 0; et en conservant les termes de plus haut degré, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+a} = 1$). Il est inutile ici (même si ce n'est pas spécialement difficile) de calculer la limite de f' en 0, on peut déjà conclure que f' est toujours positive, ce dont on déduit que f est bien croissante.

Il faut maintenant faire le lien avec la suite (u_n) en remarquant que $\ln(u_n) = n \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right) = f(n)$. La fonction f étant croissante, on aura certainement, pour tout entier n , $f(n) \leq f(n+1)$, c'est-à-dire $\ln(u_n) \leq \ln(u_{n+1})$. Un petit passage à l'exponentielle donne alors $u_n \leq u_{n+1}$, ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante.

- Le plus simple est de démontrer séparément chacune des deux inégalités en faisant tout passer d'un seul côté et en faisant des études de fonctions. Posons ainsi $g(t) = t - \ln(1+t)$. La fonction

g est définie sur \mathbb{R}_+ (elle est même définie entre -1 et 0 , mais pour ce qu'on nous demande, pas la peine de s'y intéresser), de dérivée $g'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \geq 0$. La fonction g est donc croissante, et comme $g(0) = 0$, elle est toujours positive, ce qui prouve que $t - \ln(1+t)$ sur \mathbb{R}_+ , soit $\ln(1+t) \leq t$.

De même, on pose $h(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t}$, fonction dont la dérivée vaut $\frac{1}{1+t} - \frac{1+t-t}{(1+t)^2} = \frac{1+t-1}{(1+t)^2} = \frac{t}{(1+t)^2} \geq 0$. Cette fonction est donc également croissante, et vérifie aussi $h(0) = 0$, d'où sa positivité sur \mathbb{R}_+ et l'encadrement souhaité.

- On a vu que $\ln u_n = n \ln \left(1 + \frac{a}{n}\right)$, donc en posant $t = \frac{a}{n}$ et en appliquant l'encadrement de la question précédente, $\frac{\frac{a}{n}}{1 + \frac{a}{n}} \leq n \ln \left(1 + \frac{a}{n}\right) \leq \frac{a}{n}$, soit $\frac{\frac{a}{n}}{\frac{n+a}{n}} \leq \frac{1}{n} \ln u_n \leq \frac{a}{n}$, ou encore $\frac{a}{a+n} \leq \frac{1}{n} \ln u_n \leq \frac{a}{n}$. Il ne reste plus qu'à tout multiplier par n pour obtenir l'encadrement demandé.
- Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na}{n+a} = a$ (on garde les termes de plus haut degré, a étant toujours une constante), le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $\ln(u_n)$ converge vers a . La suite (u_n) a donc pour limite e^a .
- Pour $a = 1$, on obtient le résultat classique suivant : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Exercice 8 (**)

- En effet, $a_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = 3u_n + v_n + 1 + 2 - 2u_n = u_n + v_n + 3 = a_n + 3$. La suite est bien arithmétique de raison 3 et de premier terme $a_0 = 2$, donc $a_n = 2 + 3n$.
- Allons-y : $b_{n+1} = 2u_{n+1} + v_{n+1} = 6u_n + 2v_n + 2 + 2 - 2u_n = 4u_n + 2v_n + 4 = 2b_n + 4$. La suite est bien arithmético-géométrique. Son équation de point fixe $x = 2x + 4$ a pour solution $x = -4$, on pose donc $c_n = b_n + 4$, et on vérifie que (c_n) est une suite géométrique : $c_{n+1} = b_{n+1} + 4 = 2b_n + 8 = 2(b_n + 4) = 2c_n$. La suite (c_n) est donc géométrique de raison 2 et de premier terme $c_0 = b_0 + 4 = 2u_0 + v_0 + 4 = 7$. On en déduit que $c_n = 7 \times 2^n$, puis $b_n = c_n - 4 = 7 \times 2^n - 4$.
- Il suffit de combiner a_n et b_n : en faisant simplement leur différence, on obtient immédiatement $u_n = b_n - a_n = 7 \times 2^n - 4 - (2 + 3n) = 7 \times 2^n - 3n - 6$. Ensuite, $v_n = a_n - u_n = 2 + 3n - u_n = 8 + 6n - 7 \times 2^n$.
- Calculons : $S_n = \sum_{k=0}^n 7 \times 2^k - 3k - 6 = 7 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} - 3 \times \frac{n(n+1)}{2} - 6(n+1) = 7 \times 2^{n+1} - 7 - \frac{3n(n+1)}{2} - 6n - 6 = 7 \times 2^{n+1} - \frac{3}{2}n^2 - \frac{15n}{2} - 13$. Ce résultat n'a absolument aucun intérêt, pas plus d'ailleurs que le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$, qui découle d'un simple résultat de croissance comparée.

Exercice 9 (*)

- Il faut donc résoudre l'équation $\frac{4x+2}{x+5} = x$, soit $4x+2 = x^2+5x$, qui se ramène à l'équation du second degré $x^2+x-2=0$, qui a pour racines évidentes $a = -2$ et $b = 1$.
- Pour cela, il faut que u_n ne soit jamais égal à a . On sait déjà que c'est le cas pour u_0 qui est supposé strictement positif, et on peut démontrer aisément par récurrence que tous les termes de la suite seront également strictement positifs, ce qui répond à la question. Mais on

va chercher à faire plus rigolo : remarquons que $u_{n+1} = a$ équivaut à $f(u_n) = a$. Or, l'équation $f(x) = a$ se ramène à $4x + 2 = -2(x + 5)$, soit $6x = -12$, donc $x = -2 = a$. Autrement dit, pour avoir $u_{n+1} = a$, il faut déjà avoir $u_n = a$. Notons alors n le plus petit entier pour lequel $u_n = a$ (en supposant qu'un tel entier existe). On a nécessairement $n > 0$ puisque $u_0 \neq a$, mais d'après ce qui précède, cela implique alors $u_{n-1} = a$, ce qui contredit la minimalité de n . Autrement dit, il est impossible qu'un tel entier n existe, et u_n est donc toujours différent de a .

3. Un calcul peu subtil :
$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{4u_n+2}{u_n+5} - 1}{\frac{4u_n+2}{u_n+5} + 2} = \frac{4u_n + 2 - u_n - 5}{4u_n + 2 + 2u_n + 10} = \frac{3u_n - 3}{6u_n + 12} = \frac{1}{2} \frac{u_n - 1}{u_n + 2} = \frac{1}{2} v_n.$$
 La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = -\frac{1}{2}$. Conclusion : $v_n = -\frac{1}{2^{n+1}}$.

4. Puisque $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$, $v_n u_n + 2v_n = u_n - 1$, donc $u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n$, et $u_n = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1} + 1}$.

Exercice 10 (*)

Il y a deux points sur les trois qui sont très faciles à prouver :

- $v_n - u_n = \frac{1}{n \times n!}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$.
- $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

Ne reste plus qu'à prouver que (v_n) est décroissante : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - u_n - \frac{1}{n \times n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n \times (n+1) \times (n+1)!} = \frac{n^2 + 2n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$. La suite (v_n) est donc bien décroissante, et les deux suites étant adjacentes, elles convergent donc vers une limite commune.

Notons donc l la limite commune des deux suites, et supposons que $l = \frac{a}{b}$, avec a et b deux entiers naturels. Comme la suite (u_n) est strictement croissante, et la suite (v_n) strictement décroissante,

on peut écrire, pour tout entier n , $u_n < l < v_n$, soit $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} < \frac{a}{b} < \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \times n!}$. C'est en

particulier vrai lorsque $n = b$: $\sum_{k=0}^{k=b} \frac{1}{k!} < \frac{a}{b} < \sum_{k=0}^{k=b} \frac{1}{k!} + \frac{1}{b \times b!}$. Multiplions cet encadrement par $b \times b!$:

$b \sum_{k=0}^{k=b} \frac{b!}{k!} < a \times b! < b \sum_{k=0}^{k=b} \frac{b!}{k!} + 1$. À gauche, chaque quotient $\frac{b!}{k!}$ est un entier lorsque $k \leq b$ (en effet, $b!$ est un multiple de $k!$ pour tous les entiers k compris entre 0 et b), donc le membre de gauche est une

somme d'entiers et appartient à \mathbb{N} . Notons ce nombre p . Le membre de droite est le même que celui de gauche, avec un simple $+1$, donc est égal à $p + 1$. On a donc $p < a \times b! < p + 1$. Autrement dit, le nombre $a \times b!$, qui est lui aussi un nombre entier, est strictement compris entre les deux entiers consécutifs p et $p + 1$. Ce n'est pas possible ! On a prouvé par l'absurde que l ne pouvait pas être un nombre rationnel (pour les curieux, la valeur de l est en fait le nombre e que nous connaissons bien depuis l'étude de la fonction exponentielle).

Exercice 11 (**)

1. Il suffit pour cela de prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$. C'est vrai au rang 0 par hypothèse, et si u_n et v_n sont tous deux strictement positifs, ce sera aussi le cas de $u_n + v_n$ et de $u_n v_n$, donc de u_{n+1} et v_{n+1} . Ainsi, les deux suites sont bien définies.
2. Supposons $n \geq 1$ (pour $n = 0$ l'inégalité est vraie par hypothèse). On a $v_n - u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} - \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} = \frac{u_{n-1} + v_{n-1} - 2\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}}{2} = \frac{(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}})^2}{2} > 0$, donc $u_n \leq v_n$.
3. C'est désormais facile en utilisant le résultat de la question précédente : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) > 0$ puisque $v_n > u_n$, donc (u_n) est strictement croissante. De même, $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} < 0$, donc (v_n) est décroissante.
4. On ne peut pas affirmer que les suites sont adjacentes car on ne sait pas si $(u_n - v_n)$ tend vers 0. Par contre, (u_n) étant croissante et majorée par exemple par v_0 (car $u_n \leq v_n \leq v_0$ puisque la suite (v_n) est décroissante), le théorème de convergence monotone permet d'affirmer qu'elle est convergente vers une certaine limite l . De même, (v_n) est décroissante et minorée (encore plus simplement, par 0), donc converge vers une limite l' . La suite (v_{n+1}) converge aussi vers l' , mais comme $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, on a donc, par passage à la limite, $l' = \frac{l + l'}{2}$, d'où $\frac{l'}{2} = \frac{l}{2}$, soit $l = l'$. Finalement, les deux suites ont bien la même limite (appelée moyenne arithmético-géométrique des deux réels a et b).

Exercice 12 (***)

Supposons donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, et choisissons un $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe un entier n_0 à partir duquel on aura $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Découpons alors v_n en deux parties : ce qui se passe avant n_0 et après n_0 : si $n > n_0$, $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} u_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n_0} u_k + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^{k=n} u_k$. La première somme est une constante (on peut modifier n , mais n_0 , lui, est fixé), donc, quand on la divise par n , ça va finir par se rapprocher de 0. Autrement dit, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_1$, $\frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{k=n_0} u_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Quand à la deuxième somme, elle est constituée de $n - n_0$ termes qui, d'après ce qu'on a dit plus haut, sont tous inférieurs (en valeur absolue) à $\frac{\varepsilon}{2}$, donc par inégalité triangulaire sa valeur absolue est inférieure à $(n - n_0) \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $\frac{1}{n} \left| \sum_{k=n_0+1}^{k=n} u_k \right| \leq \frac{n - n_0}{n} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (puisque $\frac{n - n_0}{n} \leq 1$). Conclusion, lorsque $n \geq \max(n_0; n_1)$, on a $|v_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ceci suffit à prouver que la suite (v_n) tend vers 0, et a donc bien la même limite que (u_n) .

Passons désormais au cas général (qui va être facile en fait), c'est à dire lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \neq 0$. Posons $w_n = u_n - l$, cette suite auxiliaire a pour limite 0, donc on peut lui appliquer ce qu'on vient de démontrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} w_k = 0$. Or, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} w_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} (u_k - l) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{k=n} u_k - nl \right) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} u_k \right) - l$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} u_k = l$, ce qu'on voulait prouver.

Posons pour plus de simplicité $w_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n_0} ku_k$, et supposons dans un premier temps que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Il existe donc un rang n_0 à partir duquel $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. On découpe la somme en deux comme précédemment : $w_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n_0} ku_k + \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=n_0+1}^n ku_k$. La première moitié a certainement une limite nulle, donc deviendra inférieure en valeur absolue à $\frac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang n_1 . Quant à la deuxième moitié, on la majore en valeur absolue (comme dans la question 1) par $\frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=n_0+1}^n \frac{k\varepsilon}{2} \leq \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$. On a donc globalement, lorsque $n \geq \max(n_0, n_1)$, $|w_n| \leq \varepsilon$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$. Comme $v_n = \frac{n(n+1)}{2n^2} w_n$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Supposons désormais $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \neq 0$. Posons comme précédemment $z_n = u_n - l$, alors $w_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=0}^n kz_k$ tend vers 0. Or, $w_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=0}^n (ku_k - kl) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=0}^n ku_k - l$. Autrement dit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=0}^n ku_k = l$, soit en multipliant par $\frac{n(n+1)}{2n^2}$ qui tend toujours vers $\frac{1}{2}$, la conclusion $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n ku_k = \frac{l}{2}$.

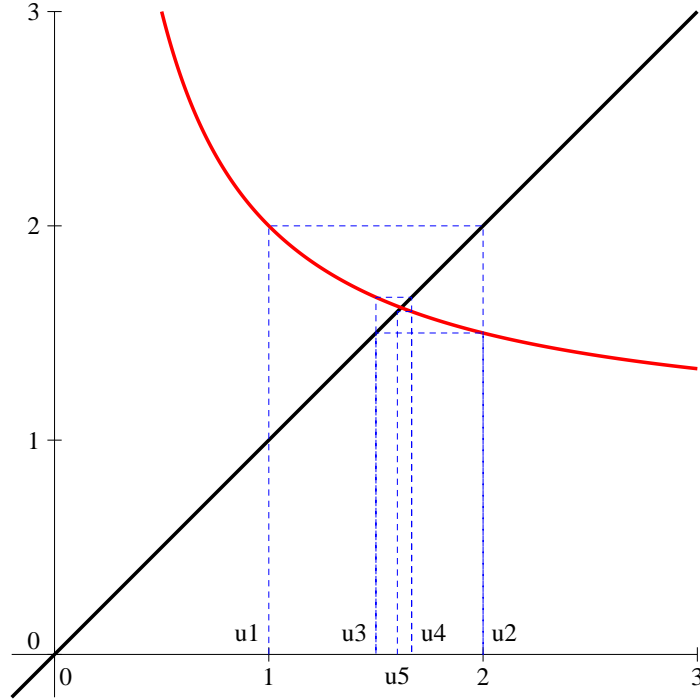
Exercice 13 (***)

- Si z_0 est réel, tous les termes de la suite seront également réels. Or, pour un réel $\frac{x+|x|}{2}$ est égal à 0 si x est négatif, et égal à x si x est positif. Si z_0 est un réel négatif, la suite sera donc nulle à partir du rang 1 (une fois que $z_1 = 0$, on ne bouge plus), et si z_0 est un réel positif, elle est constante égale à z_0 .
- Il suffit d'écrire que $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2} = \frac{r_n e^{i\theta_n} + r_n}{2} = \frac{r_n(1 + e^{i\theta_n})}{2}$. Une petite factorisation par l'angle moitié s'impose : $z_{n+1} = r_n e^{i\frac{\theta_n}{2}} \times \frac{e^{i\frac{\theta_n}{2}} + e^{-i\frac{\theta_n}{2}}}{2} = r_n \cos(\theta_n) e^{i\frac{\theta_n}{2}}$. Autrement dit, on aura simplement $r_{n+1} = r_n \cos(\theta_n)$ et $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.
- Pour θ_n , c'est facile, la suite est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et $\theta_n = \frac{\theta}{2^n}$. Pour r_n , c'est un peu plus laid puisque $r_n = r \times \cos(\theta) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{4}\right) \times \dots \times \cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)$. A priori, ce produit n'est pas très sympathique, mais une astuce diabolique permet de le simplifier en un coup d'oeil : multiplions-le donc par $\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)$! En effet, en utilisant n fois de suite la formule de duplication $\sin(2a) = 2 \cos(a) \sin(a)$, on va trouver $\cos(\theta) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{4}\right) \times \dots \times \cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) \times \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2} \cos(\theta) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{4}\right) \times \dots \times \cos\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right) \times \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right) = \dots = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(\theta) \sin(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{2^n}$. On en déduit que $r_n = \frac{r \sin(2\theta)}{2^n}$ (on peut faire une belle récurrence si on veut être plus rigoureux que ce que je n'ai fait).
- Les deux suites (r_n) et (θ_n) ont une limite nulle, ce qui suffit à prouver que la suite (z_n) tend

vers 0 (si on tient à faire réapparaître les parties réelle et imaginaire, il suffit de constater qu'elles sont respectivement égales à $r_n \cos(\theta_n)$ et à $r_n \sin(\theta_n)$ pour conclure aisément).

Exercice 14 (***)

- Calculons donc $\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{1 - 5} = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\psi$, ce qui prouve l'égalité demandée.
- La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$. Elle a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, et admet comme racines $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$ et $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \psi$. On peut donc écrire $F_n = 1\varphi^n + B\psi^n$. Les conditions initiales donnent $F_0 = A + B = 0$, donc $B = -A$, et $F_1 = A\varphi + B\psi = 1$, donc $A = \frac{1}{\varphi - \psi} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. On a donc $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.
- Commençons par donner les premiers termes de la suite (F_n) : $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$ et $F_6 = 8$, donc $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = \frac{3}{2}$, $u_4 = \frac{5}{3}$ et $u_5 = \frac{8}{5}$.
- On calcule bien sûr $u_{n+1} - u_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} - \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{u_n} - u_n = \frac{1 + u_n - u_n^2}{u_n}$. Le dénominateur est bien sûr positif (par une récurrence triviale, tous les termes de chacune des suites (F_n) et (u_n) sont strictement positifs), et le numérateur s'annule en φ et en ψ (c'est l'équation qu'on a résolue plus haut). Puisque $u_n > 0$ et $\psi < 0$, $u_{n+1} - u_n$ sera positif à l'intérieur des racines du numérateur, donc si $u_n \leq \varphi$, et négatif sinon. En fait, on est capable de dire si $u_n \leq \varphi$ en utilisant la formule explicite donnée à la question précédente : $u_n = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi^n - \psi^n}$. En effet, ψ étant négatif, ψ^n est alternativement positif et négatif, ce qui signifie que, si n est pair, le numérateur est inférieur à φ^{n+1} , et le dénominateur supérieur à φ^n , donc le quotient inférieur à φ . De la même façon, si n est impair, $u_n \geq \varphi$. On en déduit que $u_{n+1} \geq u_n$ si n est impair, mais $u_{n+1} \leq u_n$ si n est pair (ce qui est tout à fait cohérent avec les premières valeurs de la suite que nous avons calculées).
- Factorisons notre quotient par les puissances de φ : $u_n = \frac{\varphi^{n+1}(1 - (\frac{\psi}{\varphi})^{n+1})}{\varphi^n(1 - (\frac{\psi}{\varphi})^n)} = \varphi \times \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha^n}$, en posant $\alpha = \frac{\psi}{\varphi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}$. Ce réel est certainement compris entre -1 et 1 , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^n = 0$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \varphi$.
- On reprend pratiquement un calcul déjà fait : $u_{n+1} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_n} = 1 + \frac{1}{u_n}$. La fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ est décroissante sur \mathbb{R}^{+*} , et coupe la droite d'équation $y = x$ pour $x = \varphi$ (c'est encore et toujours la même équation), ce qui permet de dessiner le bel escargot suivant pour représenter les termes de la suite (u_n) :



7. D'après le calcul effectué pour déterminer la limite de (u_n) , $u_n - \varphi = \varphi \left(\frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha^n} - 1 \right) = \varphi \times \frac{\alpha^n(\alpha - 1)}{1 - \alpha^n}$. Or, $\frac{\alpha^n}{1 - \alpha^n} = \frac{\psi^n}{\varphi^n} \times \frac{\varphi^n}{\varphi^n - \psi^n} = \frac{\psi^n}{\sqrt{5}F_n}$; et $\alpha - 1 = \frac{\psi - \varphi}{\varphi}$. Finalement, $u_n - \varphi = \frac{(\psi - \varphi)\psi^n}{\sqrt{5}F_n} = \frac{-\psi^n}{F_n}$. Comme $-\psi^n = -\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n$, on obtient bien, en valeur absolue, $|u_n - \varphi| = \frac{1}{\varphi^n F_n}$.
8. Il suffit pour cela de constater que $\varphi^n \leq F_n$. Si n est pair, c'est évident, puisque $F_n \leq \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$, mais même dans le cas où n est impair, $\varphi^n - \psi^n \leq 2\varphi^n$ puisque $|\psi| < \varphi$, donc $F_n \leq \frac{2\varphi^n}{\sqrt{5}} < \varphi^n$.
9. Il faut trouver une valeur de F_n telle que $F_n^2 > 10^4$, donc $F_n \geq 100$. Un calcul légèrement laborieux nous mène à trouver $F_{12} = 144$. On a alors $u_{12} = \frac{233}{144}$ qui est une valeur approchée de φ à 10^{-4} près par excès puisque tous les termes d'indice pair de la suite sont plus grands que φ . Une passionnante division « à la main » permet d'obtenir que $\frac{233}{144} \simeq 1.61806$, et les plus courageux vérifieront de même que $u_{13} = \frac{377}{233} > 1.6180$, ce qui permet d'affirmer que 1.6180 et 1.6181 sont les valeurs approchées de φ à 10^{-4} près par défaut et par excès.
10. Faisons donc une petite démonstration par récurrence double, par exemple en fixant la valeur de n et en faisant varier p (on ne peut pas faire varier les deux à la fois). On pose donc $\mathcal{P}_p : F_{n+p} = F_{n-1}F_p + F_nF_{p+1}$. Au rang 0, la propriété stipule simplement que $F_n = F_{n-1}F_0 + F_nF_1$, ce qui est vrai puisque $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. De même au rang 1 : $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ est vraie par définition de la suite de Fibonacci. Supposons la propriété vraie aux rangs p et $p + 1$, alors $F_{n+p+2} = F_{n+p+1} + F_{n+p} = F_{n-1}F_{p+1} + F_nF_{p+2} + F_{n-1}F_p + F_nF_{p+1} = F_{n+1}(F_p + F_{p+1}) + F_n(F_{p+1} + F_{p+2}) = F_{n+1}F_{p+2} + F_nF_{p+3}$, ce qui est exactement la propriété \mathcal{P}_{p+2} . La propriété est donc vraie pour tout entier p . En particulier, en posant $n = p + 1$, on obtient $F_{2p+1} = F_p^2 + F_{p+1}^2$, ce qui prouve effectivement que les termes d'indice impair de la suite sont sommes de deux carrés.

11. Et si on faisait une nouvelle récurrence ? Au rang 0, on a $\sum_{k=0}^0 F_k = 0$, et $F_2 - 1 = 1 - 1 = 0$, donc la propriété est vraie. Supposons la vérifiée au rang n , alors $\sum_{k=0}^{n+1} F_k = F_{n+1} + \sum_{k=0}^n F_k = F_{n+1} + F_{n+2} - 1 = F_{n+3} - 1$ en utilisant la relation de récurrence définissant la suite (F_n) . cela prouve que la propriété reste vraie au rang $n + 1$, et achève la récurrence.
12. La question est bizarrement formulée, puisqu'elle donne la valeur de la suite juste avant de la demander. Bref, jamais deux sans trois, on va faire une belle récurrence. Au rang 1 (le rang 0 n'est pas vraiment pertinent vu le F_{n-1} qui traîne dans la formule), on a $F_2 F_0 - F_1^2 = -1$, ça marche. Supposons la formule vérifiée au rang n , alors au rang suivant $F_{n+2} F_n - F_{n+1}^2 = (F_{n+1} + F_n) F_n - F_{n+1}^2 = F_n^2 - F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) = F_n^2 - F_{n+1} F_{n-1} = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$.
13. Pour comparer les deux nombres, calculons leur tangente : à droite, c'est facile, ça vaut bien évidemment 1. À gauche, c'est à peine plus compliqué, mais il faut bien sûr se souvenir de ses formules d'addition de tangente : $\tan\left(\arctan\left(\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\right) - \arctan\left(\frac{F_n}{F_{n+3}}\right)\right) = \frac{\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \frac{F_n}{F_{n+3}}}{1 + \frac{F_{n+2} F_n}{F_{n+1} F_{n+3}}} = \frac{F_{n+2} F_{n+3} + F_{n+1} F_n}{F_{n+1} F_{n+3} - F_{n+2} F_n} = \frac{F_{n+2}(F_{n+2} + F_{n+1}) - F_{n+1}(F_{n+2} - F_{n+1})}{F_{n+2}^2 + (-1)^{n+2} + F_{n+1}^2 - (-1)^{n+1}} = \frac{F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2}{F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2} = 1$.
1. Les deux membres ont donc la même tangente, ils sont égaux à π près. Mais comme $0 < \frac{F_n}{F_{n+3}} < 1$, on a certainement $0 < \arctan\left(\frac{F_n}{F_{n+3}}\right) < \frac{\pi}{4}$. L'autre arctangente étant pour le même genre de raison comprise entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$, la différence des deux est (strictement) comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et donc bien égale à $\frac{\pi}{4}$. On obtient ainsi toute une série de formules palpitants, comme par exemple $\arctan\left(\frac{55}{34}\right) - \arctan\left(\frac{21}{89}\right) = \frac{\pi}{4}$. Étonnant, non ?

Problème (***)

Partie A : Exemples

1. (a) On a dans ce cas $w_n = \sum_{k=0}^{k=n} 2 \times 3 = 6(n + 1)$.
- (b) Dans ce deuxième exemple $w_n = \sum_{k=0}^{k=n} 2^k \times 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^{k=n} 2^k \times 3^{-k} = 3^n \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3^n \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3^{n+1} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.
2. (a) On calcule $\sum_{k=n+1}^{k=m} u_k = \sum_{k=n+1}^{k=m} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \frac{1}{2^{n+1+k}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^{m-n}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^{m-n}}\right) = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^n} = u_n$, donc l'inégalité demandée est vraie.
- (b) Il s'agit « simplement » de découper la somme constituant w_{2n} en morceaux et de faire les bonnes majorations : $w_n = \sum_{k=0}^{k=2n} u_k v_{2n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} u_k v_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{k=2n-1} u_k v_{2n-k} + u_{2n} v_0$. La première somme est égale à $u_0 v_{2n} + u_1 v_{2n-1} + \dots + u_n v_n$. Comme la suite (v_n) est supposée décroissante et que tous les termes de (u_n) sont positifs, elle est inférieure ou égale

à $(u_0 + u_1 + \dots + u_n)v_n = u_0v_n + v_n \sum_{k=1}^{k=n} u_k \leq u_0v_n + u_0v_n = 2v_n$ (cette dernière inégalité découle de la question précédente). De même, en utilisant la décroissance de (v_n) , la deuxième somme est inférieure ou égale à $v_1 \sum_{k=n+1}^{k=2n-1} u_k \leq v_1u_n$ (toujours d'après la question précédente). En additionnant ces majorations, on obtient bien $w_{2n} \leq 2v_n + v_1u_n + v_0u_{2n}$.

La deuxième majoration est du même style : $w_{2n+1} = \sum_{k=0}^{k=n} u_kv_{2n+1-k} + \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_kv_{2n+1-k} + v_{2n+1}v_0 \leq v_{n+1}u_0 + v_{n+1}(u_1 + u_2 + \dots + u_n) + v_1 \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_k + u_{2n+1}v_0 \leq 2v_{n+1} + v_1u_n + v_0u_{2n+1}$.

(c) Les deux suites (u_n) et (v_n) ont pour limite 0 (pour (v_n) , ça fait partie des hypothèses, et pour (u_n) c'est une conséquence du fait qu'il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$). On en déduit aisément que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_0u_{2n} + 2v_n + v_1u_n = 0$, et pareil pour $2v_{n+1} + v_1u_n + v_0u_{2n+1}$. Comme de plus tous les termes de la suite (w_n) sont positifs (ils sont constitués d'une somme de réels positifs), le théorème des gendarmes permet de dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_{2n+1} = 0$. Les deux sous-suites constituées des termes pairs et impairs convergent vers la même limite, la suite (w_n) converge également vers 0.

(d) D'après l'inégalité triangulaire, on aura

$0 \leq |(u' \times v)_n| = \left| \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k v_{n-k} \right| \leq \sum_{k=0}^{k=n} \left| \left(-\frac{1}{2}\right)^k v_{n-k} \right| = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^k} v_{n-k} = w_n$. Comme on vient de voir que la suite (w_n) convergeait vers 0, le théorème des gendarmes nous donne la convergence de $(|u' \times v|)$, et donc de $(u' \times v)$, vers 0.

Partie B : Application à l'étude d'un ensemble de suites

1. Si (u_n) est une suite décroissante, on a $\frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \geq \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) = a_n \geq a_{n+1}$, donc la suite appartient effectivement à A . Au contraire, si (u_n) est strictement croissante, on aura toujours $\frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) < u_n < u_{n+1}$, donc la suite n'appartient pas à A .
2. (a) La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$, donc elle admet deux racines $r = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$ et $s = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$. Le terme général de la suite est donc bien de la forme $z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
- (b) La suite définie par $u_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, par exemple, appartient à A (elle vérifie la récurrence linéaire de la question précédente, et on vérifie facilement que ses termes sont tous positifs), mais n'est pas monotone puisque les termes d'indices pairs de la suites sont plus grands que 1 et les termes d'indices impairs plus petits que 1.
3. (a) Calculons donc, pour $n \geq 1$, $c_{n+1} - c_n = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n - a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} = a_{n+1} - \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \leq 0$ puisque $(a_n) \in A$. La suite (c_n) est donc décroissante. Comme elle est par ailleurs constituée de termes positifs (puisque c'est le cas de (a_n)), elle est minorée, donc elle converge.
- (b) Il semble assez naturel de procéder à une récurrence. Pour $n = 0$, l'égalité stipule que $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 c_0 = a_0$, ce qui est effectivement vrai. Supposons désormais l'égalité vérifiée au

rang n , alors $\sum_{k=0}^{k=n+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n+1-k} = c_{n+1} + \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} c_{n-k} = c_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}a_n = a_{n+1}$. La propriété est donc vérifiée au rang $n+1$, et la récurrence achevée. Ce calcul prouve que les suites $b \times c$ et a sont tout simplement identiques.

(c) La suite (u_n) convergeant vers l , la suite ε a pour limite 0. De plus, elle est décroissante à partir du rang 1 tout comme (u_n) , donc tous ses termes sont positifs (sinon elle ne pourrait pas converger vers 0). Elle vérifie donc les hypothèses faites sur la suite (v_n) dans la partie précédente, et on peut en conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$.

(d) Ce n'est pas si dur que ça en a l'air : $d_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (c_{n-k} - l) = \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} - l \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = a_n - l \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{2}} = a_n + \frac{3}{2}l \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$. On peut également écrire que $a_n = d_n + \frac{3}{2}l \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

La toute dernière question est un simple calcul de limite : on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$, et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \text{ (suite géométrique), donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{3}l.$$

Problème 2 (***)

- Si (u_n) est constante égale à a , on aura $p_n = \prod_{k=1}^n a = a^n$, ce qui signifie que (p_n) est une suite géométrique de raison a .
- Il aurait fallu enlever d'abord le cas particulier où un des termes de la suite (u_n) est égal à 0, puisque dans ce cas la suite (p_n) est nulle à partir d'un certain rang, et converge donc vers 0, quelle que soit la nature de (u_n) . Si on suppose donc que u_n n'est jamais nul, et du coup que p_n non plus, on peut constater que $u_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$. Or, si (p_n) a une certaine limite l , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{n-1} = l$, et le quotient tend donc vers 1. Hum, à un petit détail près quand même, c'est que si $l = 0$, on ne peut rien conclure. Il aurait en fait fallu que l'énoncé précise que (p_n) doit converger vers une limite non nulle.
- (a) Dans ce cas, on calcule $p_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$. Manifestement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = +\infty$, la suite (p_n) diverge donc.
 (b) Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$, la réciproque de la question 2 est fautive (même si on élimine le cas de la limite nulle).
- (a) On calcule classiquement $q_{n+1} = p_{n+1} \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)$. Or, par construction de la suite (p_n) , on a $p_{n+1} = p_n \times \cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)$, et on sait bien depuis qu'on a fait un chapitre inoubliable sur la trigonométrie que $\cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) \times \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2a}{2^{n+1}}\right) = \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)$. On peut donc écrire $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n \times \sin\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{1}{2}q_n$. La suite (q_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et de premier terme $q_1 = p_1 \times \sin\left(\frac{a}{2}\right) = \cos\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin(a)$. On en déduit que $q_n = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2} \sin(a) = \frac{\sin(a)}{2^n}$.

(b) La question précédente prouve que $p_n = \frac{\sin(a)}{2^n \sin(\frac{a}{2^n})}$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{2^n} = 0$, et on sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (taux d'accroissement tendant vers la dérivée de \sin en 0, qui vaut 1). On peut en conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n \sin(\frac{a}{2^n})}{a} = 1$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right) = a$. Il ne reste plus qu'à intégrer ceci dans le dénominateur de p_n pour obtenir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{\sin(a)}{a}$.

5. (a) Il suffit d'appliquer la définition de la limite avec par exemple $\varepsilon = \frac{1}{2}$: il existe un entier n_0 à partir duquel $|u_n - 1| < \frac{1}{2}$, soit $\frac{1}{2} < u_n < \frac{3}{2}$, ce qui implique évidemment $u_n > 0$.

(b) En notant k le nombre réel $k = \prod_{k=1}^{n_0-1} u_k$, on peut écrire, lorsque $n \geq n_0$, $p_n = k \times \prod_{n=0}^n u_k = k \times e^{S_n}$ (puisque les propriétés élémentaires sur le logarithme permettent d'écrire $S_n = \ln\left(\prod_{n_0}^n u_k\right)$). On va encore une fois se placer dans le cas où la suite (u_n) ne s'annule jamais, ce qui implique $k \neq 0$. La convergence de (p_n) est alors équivalente à celle de (e^{S_n}) , et donc à celle de (S_n) elle-même.

(c) Dans ce cas particulier, on a $u_n > 0$ dès le rang 1, et on pose donc $S_n = \sum_{k=1}^n \ln(\sqrt[k]{k}) =$

$\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k}$. La suite (S_n) est clairement croissante (puisque l'on ajoute à chaque fois un nouveau terme positif à la somme), il suffit donc de savoir si elle est majorée pour prouver sa convergence (et celle de (p_n) par la même occasion en utilisant la question précédente). Utilisons pour cela l'indication donnée par l'énoncé : posons $g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ et étudions rapidement les variations de la fonction g . Elle est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} , de dérivée $g'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$. La fonction g est donc décroissante sur $[e, +\infty[$, et en particulier sera décroissante sur $[n, n+1]$ dès que $n \geq 3$. On en déduit que, sous cette condition, $\forall x \in [n, n+1], \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{\ln(x)}{x}$. Il ne reste plus qu'à intégrer cette inégalité entre n et $n+1$ pour en déduire que $\int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(n)}{n}$. En sommant toutes ces inégalités pour

les valeurs de k comprises entre 3 et n , on trouve alors $\sum_{k=3}^n \int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \sum_{k=3}^n \frac{\ln(k)}{k} \leq S_n$. Or, le membre de gauche de notre inégalité, via la relation de Chasles, est égal à $\int_3^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln(x))^2 \right]_3^{n+1} = \frac{1}{2} (\ln^2(n+1) - \ln^2(3))$. Cette expression a manifestement pour limite $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui prouve que (S_n) ne peut pas converger. Le produit (p_n) est donc lui-même divergent.

6. (a) Notons h la fonction définie sur \mathbb{R}^{+*} par $h(x) = x - \ln(1+x)$. Elle est dérivable, de dérivée $h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$. La fonction est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$, et tend vers 0 en 0 (calcul immédiat), ce qui prouve qu'elle ne prend que des valeurs strictement positives.

(b) Puisque $T_{n+1} - T_n = v_{n+1} > 0$, la suite est bien croissante. Si (T_n) converge, cela signifie

qu'elle est majorée par un certain réel M . Mais alors, quel que soit l'entier n , $\sum_{k=1}^n \ln(1 + v_k) \leq \sum_{k=1}^n v_k \leq M$. Autrement dit, $\ln(p_n) \leq M$, et la suite $(\ln(p_n))$ est elle-même majorée.

Or, la suite (p_n) est croissante puisque $\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 + v_{n+1} > 1$, donc $(\ln(p_n))$ est elle-même croissante. Par théorème de convergence monotone, $(\ln(p_n))$ est une suite convergente, et (p_n) également.

- (c) Dans la question 3, on avait $p_n = 1 + v_n$, avec $v_n = \frac{1}{n}$, ce qui est certainement positif et tend vers 0. La contraposée de la question précédente indique que la divergence de (p_n) (prouvée à la question 3) implique celle de (T_n) , qui est justement égale à $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$ (si cette suite croissante ne converge pas, elle tend nécessairement vers $+\infty$).

7. (a) Dans ce cas, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + a^{2^n} = +\infty$ (avec un tout petit cas particulier où la limite vaut 2 si $a = 1$). La question 2 prouve alors que (p_n) ne peut pas converger.

- (b) On va essayer d'utiliser le résultat de la question 6.b : dans notre cas, $T_n = \sum_{k=1}^n a^{2^k}$.

Ce n'est pas une somme géométrique puisqu'il manque un paquet de termes, mais c'est certainement plus petit qu'une somme géométrique : $T_n \leq \sum_{k=0}^{2^n} a^k = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a} \leq \frac{1}{1 - a}$.

La suite (T_n) est donc majorée, elle est toujours croissante, elle converge nécessairement, et le produit (p_n) aussi.

- (c) On peut écrire le calcul suivant : $(1 - a^2)p_n = (1 - a^2)(1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8) \dots (1 + a^{2^n}) = (1 - a^4)(1 + a^4)(1 + a^8) \dots (1 + a^{2^n}) = \dots = 1 - a^{2^{n+1}}$. On effectue successivement n utilisations de l'identité remarquable $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. Comme $a < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{2^{n+1}} =$

0, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - a^2)p_n = 1$. Autrement dit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{1 - a^2}$.