Feuille d'exercices n°20 : séries

PTSI B Lycée Eiffel

27 mai 2016

Exercice 1 (* à ***)

Étudier la nature et calculer la somme éventuelle des séries suivantes (distinguer selon la valeur de x pour les séries faisant intervenir un x). On a le droit d'utiliser la formule vue en exercice pour les séries géométriques dérivées :

- $\sum \frac{n-1}{3^n}$
- $\sum \frac{1}{2^{2n+1}}$
- $\sum \frac{3+n2^n}{4^{n+2}}$
- $\sum \frac{\mathrm{ch}(n)}{3^n}$
- $\sum e^{-nx}$
- $\sum \frac{n(n-1)x^n}{n!}$
- $\sum \frac{4(-1)^n}{n!}$
- $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
- $\sum \frac{5}{(2n+1)(2n+3)}$
- $\sum \frac{1}{F_n}$ (F_n étant le terme d'indice n de la suite de Fibonacci)
- $\sum \frac{2n^2}{n^3-1}$
- $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
- $\sum \frac{1}{4n^2-1}$
- $\sum \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$

Exercice 2 (**)

Soit u_n une suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = e^{-u_n}u_n$.

1. Montrer que la suite u_n est convergente et préciser sa limite.
2. En posant $v_n = \ln u_n$, calculer la somme partielle de la série de terme général u_n en fonction de v_0 et de v_{n+1}.
3. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 3 (*)

À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, déterminer un équivalent simple du reste d'indice n de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$. Si on est courageux, on généralisera pour la série de terme général $\frac{1}{n^k}$.

Exercice 4 (***)

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2. Déterminer la nature de la série de terme général u_n^2 et sa somme éventuelle.
3. Prouver que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
4. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 5 (* à **)

Étudier la nature de chacune des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme :

- $\sum \dfrac{1}{n^2 - n}$
- $\sum \dfrac{1}{e^n + e^{-n}}$
- $\sum \dfrac{1}{n^3 + 2^n}$
- $\sum \ln \dfrac{n^2 + n^4}{2n^4}$
- $\sum \sqrt{\dfrac{n+2}{n^3 - 5n + 1}}$
- $\sum \dfrac{\ln n}{3^n}$
- $\sum \dfrac{\ln(1+n)}{\ln(1+3n)}$
- $\sum \dfrac{n^2}{n!}$
- $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$
- $\sum \ln \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2n}$
- $\sum \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
- $\sum \dfrac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$

Les dernières séries de l'exercice sont connues sous le nom de séries de Bertrand.

Exercice 6 (*)

En admettant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Exercice 7 (**)

1. Prouver la convergence de la série de terme général $\arctan\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$.
2. Comparer ce terme général avec $\arctan(n+1) - \arctan(n)$.
3. En déduire la valeur de la somme de la série étudiée.

Exercice 8 (***)

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que la série de terme général $a\sqrt{n-1} + b\sqrt{n} + c\sqrt{n+1}$ soit convergente. Indice : un peu de révision de développements limités ne peut pas vous faire de mal.
2. Même question pour la série de terme général $\sqrt{n^2+4n+1} - \left(an + b + \dfrac{c}{n}\right)$ (et même indice !).
3. Vous êtes tellement bien partis que vous allez maintenant déterminer la nature de la série de terme général $\sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2+3}$ en fonction du réel a.

Problème 1 (***)

Dans tout ce problème, on étudie différentes séries ayant une forme proche de celle de la série exponentielle.

I. Série exponentielle

Le but de cette partie est de prouver la convergence de la série exponentielle et de donner quelques propriétés de sa limite, **sans** utiliser vos connaissances éventuelles sur cette série.

1. Montrer que, $\forall n \geqslant 4$, $n! \geqslant 2^n$.
2. En déduire que, $\forall n \geqslant 4$, $\displaystyle\sum_{k=4}^{k=n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^3}$.
3. Prouver la convergence de la série exponentielle $\sum \frac{1}{k!}$, et donner un encadrement de sa limite.

II. Suites et séries de Cantor

Une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'**entiers** relatifs est appelée suite de Cantor si $u_1 \in \mathbb{Z}$ et $\forall n \geqslant 2$, $0 \leqslant u_n \leqslant n-1$. La série de Cantor associée à une telle suite (u_n) est la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{n!}$. On considère dans cette partie une suite de Cantor (u_n) et on note S_n la somme partielle de la série de Cantor associée : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{u_k}{k!}$.

1. Calculer en fonction de n et p la somme $A = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{k=n} \frac{k-1}{k!}$ (on pourra utiliser un télescopage).
2. Montrer que, $\forall 1 \leqslant p < n$, $0 \leqslant S_n - S_p \leqslant A$.
3. En déduire que la série de Cantor associée à (u_n) est convergente. On notera S sa limite.
4. Montrer que, $\forall p \geqslant 1$, $S_p \leqslant S \leqslant S_p + \dfrac{1}{p!}$.

III. Développement de Cantor d'un réel

On considère désormais un réel quelconque x et on note, pour $n \geqslant 1$, $p_n = Ent(n!x)$ (où $Ent(x)$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x). On définit ensuite (u_n) par $u_1 = p_1$ et, $\forall n \geqslant 2$, $u_n = p_n - np_{n-1}$.

1. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $np_{n-1} \leqslant p_n \leqslant n!x < p_n + 1 \leqslant n(p_{n-1}+1)$.
3. En déduire que (u_n) est une suite de Cantor.
4. On note comme précédemment S_n la somme partielle de la série de Cantor associée à (u_n) : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{u_k}{k!}$. Exprimer S_n en fonction de p_n.
5. Prouver que la série converge vers x.

Problème 2 (***)

On note dans cet exercice E l'ensemble de toutes les suites (p_n) croissantes (mais pas forcément strictement) d'entiers naturels telles que $p_0 \geqslant 2$. Pour une suite (p_n) appartenant à E, on s'intéresse à la série (S_n) de terme général $\dfrac{1}{p_0 \cdots p_n}$. Autrement dit, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\prod_{i=0}^{k} p_i}$.

1. Commençons par étudier quelques cas particuliers :
   (a) Dans le cas où la suite (p_n) est constante égale à 2, reconnaitre la série (S_n), et en déduire sa convergence, ainsi que la valeur de sa somme.
   (b) Généraliser au cas d'une suite (p_n) constante égale à n, pour un certain entier naturel $n \geqslant 2$.
   (c) Supposons désormais que $p_n = n + 2$, reconnaître à nouveau la série (S_n), et prouver sa convergence vers une somme à déterminer. Vérifier que cette somme appartient à l'intervalle $]0,1]$.
   (d) En supposant désormais que $p_n = 2n + 2$, prouver que le terme général de la série (S_n) est égal à $\dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$, en déduire la convergence et la somme de la série (S_n). Vérifier à nouveau que la somme appartient à $]0,1]$.
2. Dans le cas général, prouver que la série (S_n) est toujours convergente, et que sa somme appartient à $]0,1]$. On notera désormais $S(p)$ la somme de la série associée à la suite $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que l'application $S : E \to]0,1]$ est une application injective (on pourra commencer par constater que, si $p_0 > q_0$, alors $S(p) < S(q)$).
4. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]0,1]$. On construit à partir de x la suite (y_n) de la façon suivante : $y_0 = x$ et $\forall n \geqslant 1$, $y_{n+1} = p_n y_n - 1$, où $p_n = \mathrm{Ent}\left(1 + \dfrac{1}{y_n}\right)$.
   (a) Déterminer les premiers termes des suites (y_n) et (p_n) lorsque $x = \dfrac{3}{7}$ (calculez jusqu'à ce qu'il se produise quelque chose de remarquable, ce qui devrait arriver vite). Calculer $S(p)$ pour la suite (p_n) ainsi obtenue.
   (b) Dans le cas général, montrer que (y_n) est une suite décroissante d'éléments de $]0,1]$.
   (c) En déduire que (p_n) vérifie toujours les hypothèses posées en début d'exercice.
   (d) Exprimer x en fonction de $p_0, p_1, \ldots, p_n$ et y_n, et en déduire la valeur de $S(p)$ lorsque $p = (p_n)$. Conclure que S est une application bijective de E dans $]0,1]$.