Feuilles d'exercices n°4 : Ensembles

PTSI B Lycée Eiffel

1er octobre 2015

Exercice 1 (***)

Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $\forall n \geqslant 4$, $2^n \leqslant n!$
2. $\forall x \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.
3. $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k \times k! = (n+1)! - 1$
4. Le nombre de diagonales dans un polygône à n côtés est $\dfrac{n(n-3)}{2}$.
5. La dérivée n-ème de la fonction $f : x \mapsto (x-1)e^{-x}$ est donnée par $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n-1)e^{-x}$.

Exercice 2 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n, puis la prouver par récurrence.

Exercice 3 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 4n + 6)$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + \dfrac{1}{3^n}$.

Exercice 4 (***)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n, puis la prouver par récurrence.

Exercice 5 (*)

Exprimer à l'aide du symbole Σ les expressions suivantes :

1. $S_1 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{12}$
2. $S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{16} + \cdots + \dfrac{10}{1\ 024}$
3. $S_3 = a + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^3}{3} + \cdots + \dfrac{a^n}{n}$
4. $S_4 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50$

Exercice 6 (** à ***)

Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)$
2. $\displaystyle\sum_{k=945}^{k=2015} 3$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(6k^2+4k+1)$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2-1)$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=18} \frac{1}{3^k}$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k}$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} 2^k+k^2+2$
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}}$

Exercice 7 (**)

Déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall k \geqslant 2$, $\dfrac{k-5}{k(k^2-1)} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k} + \dfrac{c}{k+1}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$.

Exercice 8 (**)

Il s'agit d'une méthode alternative à celle du cours pour calculer la sommes des carrés d'entiers.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3$.
2. En développant $(k+1)^3$, exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3$ à l'aide de sommes classiques.
3. En comparant les deux calculs précédents, retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k^2$.

Exercice 9 (***)

Calculer les sommes doubles suivantes :

$\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$; $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$; $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$; $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$ et $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i2^j$

Exercice 10 (**)

Calculer les produits suivants :

1. $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$
2. $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n}(6k-3)$

Exercice 11 (***)

Le but de cet exercice est de calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)^3$ de trois façons différentes.

1. Écrire S_n sans utiliser de symbole somme. De combien de termes cette somme est-elle composée ?
2. Calculer S_n en développant $(2k+1)^3$.
3. On pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}(2k)^3$ et $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3$. Expliquer pourquoi $U_n = S_n + T_n$ (à l'aide d'une phrase si vous n'arrivez pas à le faire par le calcul).

4. Calculer T_n et U_n.
5. Retrouver la valeur de S_n à l'aide des deux questions précédentes.
6. Prouver par récurrence que $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$.

Exercice 12 (**)

Déterminer pour chacune des applications suivantes si elle est injective, surjective ou bijective (ou rien du tout !) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$:

- $f_1(n) = n+5$
- $f_2(n) = n^2$
- $f_3(n) = n+1$ si n est pair, et $f_3(n) = n-1$ si n est impair
- $f_4(n) = Ent\left(\frac{n}{3}\right)$
- $f_5(n) = |n-10|$

Exercice 13 (*)

Pour chacune des applications suivantes, données avec leur ensemble de départ E et leur ensemble d'arrivée F, déterminer si elles sont injectives, surjectives, bijectives (tous les moyens sont bons, dérivation comprise) :

1. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $E = F = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = x^3 + x - 2$, $E = F = \mathbb{R}$.
3. $h(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$, $E =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$, $F = \mathbb{R}_+$.
4. $i(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$, $E = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $F = \mathbb{R}\backslash\{3\}$.

Exercice 14 (***)

Soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective (démontrer chaque implication séparément). Quelle est alors sa réciproque ?

Exercice 15 (**)

Dans cet exercice, on note, pour un sous-ensemble A de $\mathbb{N}$, f_A la fonction indicatrice de l'ensemble A.

1. En prenant pour cette question l'ensemble A de tous les entiers naturels pairs, la fonction f_A est-elle injective ? Surjective ?
2. Quels sont les sous-ensembles A pour lesquels f_A n'est pas surjective ?
3. Démontrer que, quels que soient les ensembles A et B, $f_{A\cap B} = f_A \times f_B$ et $f_{A\cup B} = f_A + f_B - f_{A\cap B}$.
4. Exprimer $f_{\overline{A}}$ en fonction de f_A (et démontrer la formule, bien entendu).
5. Déduire des deux questions précédentes une expression de $f_{A\backslash B}$, puis de $f_{A\Delta B}$ (on rappelle que $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$, ou encore $A\Delta B = (A\cup B)\backslash(A\cap B)$).
6. Redémontrer beaucoup plus facilement que dans un exercice précédent que la différence symétrique est associative, c'est-à-dire que $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

Exercice 16 (*)

On considère sur $\mathbb{Z}$ la relation définie de la façon suivante : xRy si et seulement si $x+y$ est pair. Prouver qu'il s'agit d'une relation d'équivalence, et déterminer les classes d'équivalence de cette relation.

Exercice 17 (*)

On définit sur $\mathbb{R}$ une relation R par $xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$. Démontrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence, et déterminer la classe d'équivalence d'un réel x. Combien comporte-t-elle d'éléments ?

Exercice 18 (*)

Déterminer le nombre de diviseurs de 10! (sans les écrire tous).

Exercice 19 (**)

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $xy = 2x + 3y$.
2. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$.
3. $x^2 = 9y^2 - 39y + 40$.
4. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$.

Exercice 20 (***)

On considère la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.
2. Montrer que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+p} = F_n F_{p-1} + F_{n+1} F_p$. En déduire que le pgcd de F_n et de F_p est le même que celui de F_n et F_{n+p}.
4. Montrer que, $\forall (n, m) \geqslant 2$, $F_n \wedge F_m = F_{n \wedge m}$.
5. Montrer que, si $n \geqslant 5$ et n est premier, alors F_n est premier. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 21 (** à *****)

Un ensemble est E est dit **dénombrable** s'il existe une application $f : E\mathbb{N}$ bijective. Comme trouver une application bijective est parfois délicat, on pourra admettre le théorème suivant : tout ensemble infini E pour lequel il existe une application injective de E dans $\mathbb{N}$ est dénombrable.

1. Montrer que l'ensemble des entiers pairs est dénombrable.
2. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
3. Montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
5. Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (c'est ça qui vaut une difficulté de *****).
6. Montrer qu'il existe une bijection de $]0; 1[$ dans $\mathbb{R}$.
7. Montrer qu'il y a « autant de points » dans une droite que dans un demi-cercle (autrement dit qu'il existe une bijection de l'un vers l'autre).

Exercice 22 : théorème de Cantor-Bernstein (****)

Soient X et Y deux ensembles tels qu'il existe deux applications $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ toutes les deux injectives. On veut prouver qu'il existe une bijection de X sur Y. Pour cela, on note $\varphi = f \circ g$. On définit les sous-ensembles A_i de Y par récurrence de la façon suivante : $A_0 = Y \backslash f(X)$, $A_1 = \varphi(A_0)$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_{i+1} = \varphi(A_i)$. On pose enfin $A = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

1. Montrer que les ensembles A_i sont disjoints.
2. Montrer que l'ensemble A est stable par φ (c'est-à-dire que $\varphi(A) \subset A$).
3. On pose $B = g(A)$, et $C = X \backslash B$. Montrer que $f(B) = A \backslash A_0$, et que tout élément de B possède un unique antécédent par g dans Y. On notera cet antécédent $g^{-1}(x)$. Montrer que $g^{-1}(x) \in A$.
4. On définit l'application $h : X \to Y$ en posant $h(x) = g^{-1}(x)$ si $x \in B$, et $h(x) = f(x)$ si $x \in C$. Montrer que h est une bijection de X sur Y.