

# Feuille d'exercices n°12 : Polynômes

PTSI B Lycée Eiffel

2 février 2016

## Exercice 1 (\*)

Soient  $P$  et  $Q$  les deux polynômes définis par  $P(X) = 2X^3 + 5X - 1$  et  $Q(X) = -X^2 + 3X$ . Déterminer chacun des polynômes suivants :  $P+Q$  ;  $PQ$  ;  $P^2(X)$  ;  $P(X^2)$  ;  $P \circ Q$  ;  $Q \circ P$  ;  $3P^3Q - Q \circ P^2$ .

## Exercice 2 (\*)

Soit  $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$ .

1. Déterminer une racine évidente du polynôme  $P$ .
2. Factoriser  $P$  sous la forme  $(X + 2)Q(X)$ , où  $Q$  est un polynôme de degré 2.
3. En déduire le tableau de signe de  $P$  sur  $\mathbb{R}$ .
4. Résoudre les inéquations  $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 > 0$  et  $e^{2x} - 2e^x \leq 5 - 6e^{-x}$

## Exercice 3 (\* à \*\*\*)

Factoriser chacun des polynômes suivants dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$  :

1.  $P(X) = X^4 - 1$
2.  $P(X) = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$  (on trouvera un entier  $n \leq 5$  racine double de  $P$ ).
3.  $P(X) = X^8 + X^4 + 1$
4.  $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$
5.  $P(X) = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$

## Exercice 4 (\*\*)

1. Déterminer la forme algébrique des racines carrées des nombres complexes  $\frac{i + \sqrt{3}}{2}$  et  $\frac{i - \sqrt{3}}{2}$ .
2. Effectuer la division euclidienne de  $X^6 - i$  par  $X^2 + i$ . En déduire, à l'aide de la question précédente, la factorisation de  $X^6 - i$ .
3. Résoudre l'équation  $z^6 = i$  en passant par la forme exponentielle. En déduire la valeur exacte de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

## Exercice 5 (\*\*)

Pour chacune des conditions suivantes, déterminer tous les polynômes la vérifiant :

- $P$  est de degré 3,  $P(0) = P(1) = P'(1) = 0$  et  $P'(0) = 2$ .
- $(X + 3)P(X) = XP(X + 1)$
- $P$  est de degré 3 ;  $(X + 1)^2$  divise  $P + 1$  et  $(X - 1)^2$  divise  $P - 1$ .
- $(X^2 + 4)P'' = 6P$
- $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$

## Exercice 6 (\*\*)

Effectuer la division euclidienne de  $P$  par  $Q$  dans chacun des cas suivants :

1.  $P(X) = X^3 + X^2 - 2X + 3$  et  $Q(X) = X^2 + 2X - 1$
2.  $P(X) = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$ , et  $Q(X) = X^2 - 3X + 1$
3.  $P(X) = X^4 - 2X^2 \cos(2\theta) + 1$  et  $Q(X) = X^2 - 2X \cos(\theta) + 1$
4.  $P(X) = X^3 - iX^2 - X$ , et  $Q(X) = X - 1 + i$
5.  $P(X) = (X \sin(\theta) + \cos(\theta))^n$  et  $Q(X) = X^2 + 1$  (on calculera seulement le reste)

## Exercice 7 (\*\*\*)

On définit la suite de polynômes  $(P_n)$  par  $P_0 = 2$ ,  $P_1 = X$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$ .

1. Calculer  $P_2$ ,  $P_3$  et  $P_4$ .
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de  $P_n$ .
3. Montrer que,  $\forall z \in \mathbb{C}^*$ ,  $P_n \left( z + \frac{1}{z} \right) = z^n + \frac{1}{z^n}$ .
4. En déduire une expression simple de  $P_n(2 \cos(\theta))$ .
5. Déterminer les racines de  $P$ , et sa factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$ .

## Exercice 8 (\*\*\*)

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -5 \end{cases}$$

Pour cela, on cherchera un polynôme unitaire de degré 3 ayant pour racines  $x$ ,  $y$ , et  $z$ , et on calculera chacun de ses coefficients en utilisant les conditions données.

## Exercice 9 (\*\*\*)

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $n + 1$  polynômes de degré  $n$  en posant  $\forall k \in \{0; \dots; n\}$ ,  $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k}$ .

1. Que valent les polynômes  $B_{3,k}$  pour les différentes valeurs de  $k$  pour lesquelles ils sont définis ?
2. Étudier rapidement les polynômes  $B_{3,k}$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ , et tracer une allure de leurs courbes représentatives sur ce même intervalle.
3. Que vaut  $\sum_{k=0}^{k=3} B_{3,k}$  ? Généraliser ce résultat, et en déduire que  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $B_{n,k}(x) \in [0, 1]$  (quelles que soient les valeurs de  $n$  et de  $k$ ).
4. Exprimer le polynôme dérivé  $B'_{n,k}$  en fonction de  $B_{n-1;k-1}$  et de  $B_{n-1;k}$ .
5. On pose  $f(x) = x$ , et on note  $f_n$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  par  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x) = \sum_{k=0}^n f \left( \frac{k}{n} \right) B_{n,k}(x)$ .  
Montrer que,  $\forall x \in [0; 1]$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ .
6. Effectuer la même démonstration qu'à la question précédente en prenant cette fois-ci  $f(x) = x^2$ .