Feuille d'exercices n°18 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

3 mai 2016

Vrai-Faux

1. Faux, ça dépend des bases dans lesquelles on choisit de représenter l'application.
2. Faux, c'est dans l'autre sens : $X = PX'$.
3. Vrai.
4. Faux, on peut simplement dire que les trois vecteurs sont coplanaires.
5. Faux, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1 (*)

Dans chacun des cas, il suffit de calculer les images des vecteurs de la base canonique et d'écrire leurs coordonnées en colonne dans la matrice A.

1. Calculs immédiats : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.
2. On calcule $f(1) = 2X+1$; $f(X) = (2X+1)X - X^2 = X^2+X$, et $f(X^2) = (2X+1)X^2 - 2X^3 = X^2$, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $f(1) = \displaystyle\int_X^{X+2} 1\ dt = X+2-X = 2$; $f(X) = \displaystyle\int_X^{X+2} t\ dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_X^{X+2} = \frac{1}{2}(X^2+4X+4-X^2) = 2X+2$; et $f(X^2) = \displaystyle\int_X^{X+2} t^2\ dt = \frac{1}{3}[t^3]_X^{X+2} = \frac{1}{3}(X^3+6X^2+12X+8-X^3) = 2X^2+4X+\frac{8}{3}$. Autrement dit, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \frac{8}{3} \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Finalement, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (*)

Pour prouver que s est une symétrie, il suffit de vérifier que $M^2 = I$ (ce qui prouvera que $s \circ s = id$), ce qui est effectivement le cas (difficile de détailler plus le calcul ici). Pour déterminer l'espace par rapport auquel on symétrise, il faut déterminer $\ker(f - id)$, ce qui revient à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & 2y & - & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = 0 & \\ -x & - & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$. Pas trop difficile à résoudre, on garde l'unique équation $x+2y+z = 0$, soit $z = -x - 2y$. Autrement dit, on symétrise par rapport à l'espace $\text{Vect}((1,0,-1),(0,1,-2))$. Quand à l'espace parallèlement auquel on symétrise, on cherche cette fois-ci le noyau de $f + id$, donc on résout le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & - & z & = & 0 \\ & & 2y & & & = 0 & \\ -x & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$. La condition $y = 0$ ramène les deux autres équations à $x = z$, donc l'espace recherché est $\text{Vect}((1,0,1))$.

Exercice 3 (**)

Ce n'est pas si méchant que ça : la division de 1 par $X^2 - X + 1$ s'écrit simplement $1 = 0 \times (X^2 - X + 1) + 1$, le reste vaut donc 1, soit $f(1) = 1$. De même, $f(X) = X$. Il faut réfléchir un tout petit peu plus ensuite : $X^2 = 1 \times (X^2 - X + 1) + X - 1$, donc $f(X^2) = X - 1$; enfin, avec un poil d'astuce, $X^3 = X \times (X^2 - X + 1) + X^2 - X = (X + 1) \times (X^2 - X + 1) - X + X - 1$, donc $f(X^3) = -1$. On peut aussi, bien entendu, effectuer vraiment la division euclidienne. La matrice dans la base canonique de f est donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul inimaginablement palpitant permet de constater que $A^2 = A$ (mais si !), l'application f est donc un projecteur. Si on souhaite déterminer le noyau en résolvant le système, en notant $P = a + bX + cX^2 + dX^3$, on a simplement les deux équations $a - c - d = b + c = 0$ (les deux autres lignes étant nulles), soit $c = -b$, et $d = a + b$. Autrement dit, $\ker(f) = \text{Vect}(1 + X^3, X - X^2 + X^3)$. En fait, on sait très bien que ce noyau est constitué des multiples de $X^2 - X + 1$, on peut vérifier que cela correspond bien à ce qu'on vien d'obtenir. Pour l'image, en prenant les vecteurs-colonnes de la matrice représentative, $\text{Im}(f) = \text{Vect}(1, X, X - 1, -1) = \mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 4 (**)

1. La linéarité de l'application est évidente, et nous allons tout simplement démontrer que c'est un endomorphisme en calculant les images des vecteurs de la base canonique (ce qui est nécessaire pour déterminer la matrice) et en constatant qu'elles sont dans $\mathbb{R}_2[X]$. En effet, $\varphi(1) = 1 - 2X$; $\varphi(X) = X^2 + X + 1 - 2X^2 + X = -X^2 + 2X + 1$; et $\varphi(X^2) = 2X^3 + 2X^2 + 2X - 2X^3 + X^2 = 3X^2 + 2X$. La matrice de l'application est donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. On peut par exemple prouver que A est inversible (ou non) en calculant son déterminant. En développant suivant la première ligne, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 8 + 6 = 14$, ce qui est très différent de 0. L'application f est donc bijective. Pour déterminer un antécédent de $X^2 - 1$, qui a pour coordonnées $(-1, 0, 1)$ dans la base canonique, on exploite A et on résout le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & -1 \\ -2x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & - & y & + & 3z & = & 1 \end{array}\right.$. La deuxième équation donne $x = y + z$, la première $x = -1 - y = -3z$ et la dernière $y = 3z - 1$. En remplaçant, on a donc $-3z = 4z - 1$, soit $z = \frac{1}{7}$, puis $x = -\frac{3}{7}$ et $y = -\frac{4}{7}$. Bon, c'est moche, mais $P = \frac{1}{7}(X^2 - 4X - 3)$ est un antécédent (et même le seul) de $X^2 - 1$ par φ.

3. D'après la question précédente, on connait déjà une solution de l'équation ! Il ne reste plus qu'à déterminer la solution générale de l'équation homogène associée $y' - \frac{2x-1}{x^2+x+1}y = 0$. Pour cela, il faut réussir à calculer (par exemple) $\int_0^x \frac{2t-1}{t^2+t+1}\,dt = \int_0^x \frac{2t+1}{t^2+t+1} - \frac{2}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dt = \ln(t^2+t+1) - \frac{8}{3}\int_0^x \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}))^2+1}\,dt = \ln(t^2+t+1) - \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$ (plus une constante dont on se contrefiche). Il ne reste plus qu'à ajouter à cette superbe fonction la solution particulière obtenue plus haut pour trouver toutes les solutions de l'équation différentielles, qui sont donc les fonctions $y : x \mapsto K\ln(t^2+t+1) + \frac{4K}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{7}(x^2-4x-3)$. On est bien contents de le savoir.

Exercice 5 (***)

1. Il suffit de constater que $u \circ (u + id) = -\,id$ pour comprendre que u est bijectif, de réciproque $u^{-1} = -u - id$.
2. Il suffit de prouver que $u(x)$ ne peut pas être proportionnel à x. Supposons donc $u(x) = \lambda x$ (avec $\lambda \neq 0$ puisque le noyau de u est réduit au vecteur nul). Alors $u^2(x) = \lambda^2 x$, donc $\lambda^2 x + \lambda x + x = 0$ en reprenant l'hypothèse faite sur u. On doit donc avoir $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, ce qui est difficile dans la mesure où cette équation a un discriminant négatif, et donc pas de racine réelle.
3. Prenons donc un x quelconque (non nul quand même) de $\mathbb{R}^4$, $(x, u(x))$ forme une famille libre d'après la question précédente. Choisissons désormais un $y \neq 0$ tel que $u(y) \notin \text{Vect}(x, u(x))$. C'est certainement possible puisque l'image de u est $\mathbb{R}^4$ tout entier (l'application est bijective). Un tel y ne peut lui-même pas appartenir à $\text{Vect}(x, u(x))$, puisque toute combinaison linéaire de x et de $u(x)$ a une image par u qui est elle-même dans $\text{Vect}(x, u(x))$ (rappelons que $u(u(x)) = -u(x) - x$). La famille $(x, u(x), y, u(y))$ est donc nécessairement une famille libre de $\mathbb{R}^4$, et par conséquent en forme une base. La matrice de u dans cette base est exactement celle demandée, puisque $u(u(x)) = -u(x) - x$ et $u(u(y)) = -u(y) - y$, toujours à cause de l'équation vérifiée par u.

Exercice 6 (**)

Chercher une telle base revient à chercher trois vecteurs (u, v, w) tels que $f(u) = 0$, $f(v) = -v$ et $f(w) = v - w$ (accessoirement, il serait bon que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$. Puisque $f(x, y, z) = (-x + z, -x - 2y + z, -x - y + z)$, on va pouvoir résoudre trois jolis systèmes. Le premier système (celui pour lequel $f(u) = 0$) se ramène tellement trivialement à l'unique équation $x = z$ que je ne l'écris même pas. Nous prendrons donc $u = (1, 0, 1)$. Pour le deuxième vecteur, $f(v) = -v$ se traduit par $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & & & + & z & = & -x \\ -x & - & 2y & + & z & = & -y \\ -x & - & y & + & z & = & -z \end{array}\right.$. Bon, une fois constaté que $z = 0$, il reste la seule condition $y = -x$, on peut donc prendre $v = (1, -1, 0)$. Reste désormais à trouver un vecteur w tel que $f(w) = v - w$, ce qui se traduit par $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & & & + & z & = & 1 - x \\ -x & - & 2y & + & z & = & -1 - y \\ -x & - & y & + & z & = & -z \end{array}\right.$. Cette fois, la première équation donne $z = 1$, donc $-x - y = -2$ (les deux dernières équations sont encore identiques). Pour ne pas s'embêter, $w = (1, 1, 1)$ fera l'affaire. Il est très facile de constater que (u, v, w) est bien une base de $\mathbb{R}^3$. De toute façon, on va devoir inverser la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de la base canonique vers (u, v, w) pour la suite des calculs, ce qui prouvera que la famille est une base. Utilisons la méthode de la résolution de système pour cela : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & a \\ & - & y & + & z & = & b \\ x & & & + & z & = & c \end{array}\right.$. La différence des deux équations extrêmes donne $y = a - c$. La deuxième équation donne alors $z = b + y = a + b - c$, puis $x = c - z = 2c - a - b$. On en déduit que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Reste à calculer des puissances : $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notons par exemple C et N ces deux matrices, la matrice N est clairement nilpotente et on vérifie aisément que $N^2 = 0$. On peut appliquer la formule du binôme de Newton (les deux matrices commutent : $CN = NC = -N$), on trouve alors $B^n = (C + N)^n = C^n + nC^{n-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$. Comme on sait que $P^{-1}AP = B$, la récurrence classique permet de constater que $A^n = PB^nP^{-1}$: c'est vrai au rang 1 puisque $PBP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A$, et si on le suppose au rang n, alors $A^{n+1} = AA^n = PBP^{-1}PB^nP^{-1} = PB^{n+1}P^{-1}$. Pour achever ce brillant exercice, il ne reste plus qu'à calculer A^n : $PB^n = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^n & (1-n)(-1)^n \\ 0 & (-1)^{n+1} & (n+1)(-1)^n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$, puis $A^n = PB^nP^{-1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 2-n & 1-n & n-2 \\ n & n+1 & -n \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 (**)

1. Il suffit de calculer le produit des deux matrices $M - I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $M + 3I = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et constater qu'il est en effet nul. D'ailleurs, on peut se contenter de calculer la première ligne, les deuxième et troisième ligne de $M - I$ étant des multiples de la première, on obtiendra également des zéros sur celles-ci.
2. Les deux sous-espaces en question ont une intersection clairement réduite au vecteur nul, on peut difficilement vérifier à la fois $f(x) = x$ et $f(x) = -3x$ sans être nul. Comme on n'a pas encore d'information sur les dimensions, prouver directement que la somme des deux espaces demande une certaine dose d'astuce. En gros, il faut écrire $x = y + z$, avec $f(y) = y$ et $f(z) = -3z$ (pour que y et z appartiennent aux deux noyaux). On sait, d'après la question précédente, que $M^2 + 2M - 3I = 0$, donc $f^2(x) + 2f(x) - 3x = 0$. On peut alors trouver relativement facilement y et z en les cherchant comme combinaisons linéaires de x et de $f(x)$. Ainsi, $f(x - f(x)) = f(x) - f^2(x) = f(x) + 2f(x) - 3x = -3(x - f(x))$, donc tous les multiples de $x - f(x)$ appartiennent à $\ker(f + 3\,id)$. De même, $f\left(x + \frac{1}{3}f(x)\right) = f(x) + \frac{1}{3}f^2(x) = f(x) - \frac{2}{3}f(x) + x = x + \frac{1}{3}f(x)$, donc tous les multiples de $x + \frac{1}{3}f(x)$ appartiennent à $\ker(f - id)$. Il ne reste plus qu'à reconstituer x à partir de ces deux morceaux : en posant $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}f(x)$ (qui appartient à $\ker(f - id)$) et $z = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}f(x)$ (qui appartient à l'autre noyau), on obtient bien $x = y + z$, ce qui prouve la supplémentarité des deux noyaux.
3. On va procéder par résolution de systèmes. On a déjà calculé plus haut la matrice représenta-

tive de $f-id$, son noyau est donc constitué des solutions du système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & 4y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$.

Les trois équations sont équivalentes, on garde la simple équation $x = 2y+z$, soit $\ker(f-id) =$ $\text{Vect}((2,1,0),(1,0,1))$. De même pour l'autre noyau, on résout $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5x & - & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & & & - & 2z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & c \end{array}\right.$.

La deuxième équation donne $x = z$, et on a donc $4x - 2y = 0$ (les deux équations extrêmes sont identiques), soit $y = 2x$, donc $\ker(f + 3\,id) = \text{Vect}((1,2,1))$. On note en particulier que $\dim(\ker(f - id)) = 2$ et $\dim(\ker(f + 3\,id)) = 1$.

4. Il suffit de prendre la famille $((2,1,0),(1,0,1),(1,2,1))$ (qui est nécessairement une base puisque les deux noyaux sont supplémentaires). Chacun des trois vecteurs ayant une image proportionnelle à lui-même par f, la matrice de f dans cette base sera bien diagonale, plus précisément égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 (***)

1. On pose bien entendu $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ (quoique les plus tordus puissent changer l'ordre). Il suffit alors de prendre $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 3 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ pour que l'égalité demandée soit vérifiée.

2. Il s'agit, pour changer, de résoudre des systèmes. Pour ne pas trainer de $\dfrac{1}{2}$ partout, on va tout multiplier par 2, l'équation $AX = X$ se traduit alors par le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & 3y & + & 6z & = & 2x \\ 3x & + & 5y & - & 6z & = & 2y \\ 3x & + & 3y & - & 4z & = & 2z \end{array}\right.$.

   Les trois équations sont en fait rigoureusement identiques, il ne restent que la condition $x+y =$ $2z$, soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{x+y}{2} \end{pmatrix}$. De même, pour l'équation $AX = -2X$, on résout $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 3y & + & 6z & = & 0 \\ 3x & + & 9y & - & 6z & = & 0 \\ 3x & + & 3y & & & = & 0 \end{array}\right.$.

   La dernière équation donne $y = -x$, et la première se résume alors (en divisant par 6) à $x + z = 0$, soit $z = -x$. La deuxième équation est alors toujours vérifiée, ce dont on déduit que $X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \end{pmatrix}$.

3. C'est évident vu les formules obtenues, en écrivant en ligne pour simplifier, $S_1 = \text{Vect}((2,0,1),(0,2,1))$, et $S_{-2} = \text{Vect}((1,-1,-1))$.

4. Au vu des calculs précédents, il suffit de prendre pour P la matrice de passage $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   La récurrence habituelle nous permet de prouver que $A^n = PD^nP^{-1}$ (en notant D la matrice diagonale de l'énoncé) : c'est vrai au rang 1 car $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A$, et en le supposant vrai au rang n, alors $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Il reste à calculer P^{-1}, par exemple par la méthode du système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & & & + & z & = & a \\ & & 2y & - & z & = & b \\ x & + & y & - & z & = & c \end{array}\right.$. Procédonc par substitution : $x = \dfrac{a-z}{2}$ et $y = \dfrac{b+z}{2}$, donc $\dfrac{a}{2} - \dfrac{z}{2} + \dfrac{b}{2} + \dfrac{z}{2} - z = c$, soit $z = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2} - c$,

puis $x = \frac{a}{4} - \frac{b}{4} + \frac{c}{2}$ et $y = \frac{a}{2} + \frac{3b}{4} - \frac{c}{2}$, soit $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Allez, un petit produit matriciel pour continuer : $PD^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & (-2)^n \\ 0 & 2 & -(-2)^n \\ 1 & 1 & -(-2)^n \end{pmatrix}$, puis $A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-(-2)^{n+1} & -2-(-2)^{n+1} & 4-(-2)^{n+2} \\ 2+(-2)^{n+1} & 6+(-2)^{n+1} & -4+(-2)^{n+2} \\ 2+(-2)^{n+1} & 2+(-2)^{n+1} & (-2)^{n+2} \end{pmatrix}$. Puisque $X_n = A^nX_0$, on en déduit (en simplifiant tout par 2), que $x_n = \dfrac{(1+(-2)^n)x_0 + (-1+(-2)^n)y_0 + (2+(-2)^{n+1})z_0}{2}$;
$y_n = \dfrac{(1-(-2)^n)x_0 + (3-(-2)^n)y_0 + (-2-(-2)^{n+1})z_0}{2}$;
et $z_n = \dfrac{(1-(-2)^n)x_0 + (1-(-2)^n)y_0 - (-2)^{n+1}z_0}{2}$.

Exercice 9 (*)

1. Soit $P = aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X]$, on cherche à écrire $P = x(X^2+1)+y(X+1)+z(2X^2-X)$, ce qui revient au système $\begin{cases} x + y = c \\ y - z = b \\ x + 2z = a \end{cases}$. En effectuant l'opération $L_3 + L_2 - L_1$, on trouve $z = a+b-c$, puis on en déduit aisément que $y = z+b = a+2b-c$ puis $x = c-y = -a-2b+2c$. Puisque le système a toujours une solution, la famille est génératrice. Puisque la solution est unique (en particulier lorsque $a = b = c = 0$), la famille est libre. il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. D'après la question précédente, la matrice de passage dans l'autre sens est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (attention quand même, les coefficients notés a, b et c dans la première question ne sont pas dans l'ordre de la base canonique).
3. Il suffit de calculer $P^{-1} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ pour en déduire que $P = 5(X^2+1) - 3(X+1) - 2(2X^2-X)$.
4. Pour la base canonique, on calcule $\varphi(1) = 0$; $\varphi(X) = X$ et $\varphi(X^2) = 2X^2$ pour en déduire la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice sera donc $M' = P^{-1}MP = P^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 10 (**)

1. On calcule et on constate que $A^2 = A$. L'application f vérifie donc $f^2 = f$, c'est un projecteur.
2. Pour le noyau, on résout le système $\begin{cases} 3x - 2y - 4z = 0 \\ x - 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$. En prenant la deuxième équation, $x = 2z$, puis en reportant dans la troisième $2z - y - z = 0$, donc $y = z$. Reste

à reprendre la première équation : $6z - 2z - 4z = 0$, qui est toujours vérifiée. Conclusion : $\ker(f) = \{(2z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((2, 1, 1))$. Pour l'image, le plus simple est de chercher les vecteurs invariants par f, et donc de résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & - & 4z & = & x \\ x & & & - & 2z & = & y \\ x & - & y & - & z & = & z \end{array}\right.$. Les équations se ramènent toutes à $x - y - 2z = 0$, donc $\text{Im}(f) = \{(y + 2z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 1, 0); (2, 0, 1))$.

3. La famille $((2, 1, 1); (1, 1, 0); (2, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (en effet, si $a(2, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(2, 0, 1) = 0$, en composant par f, on obtient $b(1, 1, 0) + c(2, 0, 1) = 0$, ce qui implique très rapidement $b = c = 0$, puis $a = 0$; la matrice de passage de la base canonique à notre famillee est inversible, la famille est donc une base). Dans cette base, le premier vecteur a une image nulle par f, les deux autres ont pour image eux-même, la matrice de f est donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 (* à **)

- Pour le premier, on peut développer directement suivant la première colonne : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 - 24 + 2 \times 12 = 2$. Encore plus rapide : on fait $L_3 - 2L_1$ pour obtenir 0 0 2 sur la dernière ligne, on développe et on a quasiment directement 2.
- Pour le deuxième, on additionne les deux premières colonnes, puis on développe suivant la première colonne : $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times (-2) = -6$.
- Plein de possiblités ici, mais le plus rapide est encore de développer directement par rapport à la deuxième ligne : $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2(10-2) - (-4-15) = -16 + 19 = 3$.
- On peut ici remplacer L_2 et L_3 par leur somme avec L_1 puis développer suivant la première colonne : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 7 = -22$.
- Cette fois-ci, différence des deux dernières lignes avec la première puis développement suivant la première colonne, avec entre les deux une petite factorisation sur les deux dernières lignes : $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2 - a^2 \\ 0 & c-a & c^2 - a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c+a-b-a) = (b-a)(c-a)(c-b)$.
- Pour le dernier, curieusement, pas vraiment de truc évident, le plus rapide est de développer suivant la première ligne et surtout de bien connaître ses formules de trigo : $D = \begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix} = \cos(a-b)(\cos(b+c)\sin(c+a) - \cos(c+a)\sin(b+c)) - \cos(b-c)(\cos(a+b)\sin(c+a) - \cos(c+a)\sin(a+b)) + \cos(c-a)(\cos(a+b)\sin(b+c) - \cos(b+c)\sin(a+b))$. On reconnait dans les parenthèses des formules d'addition de sinus pour obtenir $D = \cos(a-b)\sin(a-b) + \cos(b-c)\sin(b-c) + \cos(c-a)\sin(c-a) = \frac{1}{2}(\sin(2(a-b)) + \sin(2(b-c)) + \sin(2(c-a)))$. On peut encore simplifier en utilisant les transformations somme-produit :

$\sin(2(a-b))+\sin(2(b-c)) = 2\sin\left(\dfrac{a-b+b-c}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b-b+c}{2}\right) = 2\sin(a-c)\cos(a+c-2b)$. On en déduit (en redéveloppant le troisième sinus) que $D = \sin(a-c)\cos(a+c-2b)+\sin(c-a)\cos(c-a) = \sin(a-c)(\cos(a+c-2b)-\cos(c-a))$. Allez, un dernier coup de somme-produit : $\cos(a+c-2b)-\cos(c-a) = -2\sin\left(\dfrac{a+c-2b+c-a}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a+c-2b-c+a}{2}\right) = -2\sin(c-b)\sin(a-b)$. Finalement, $D = 2\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c)$.

Exercice 12 (***)

Effectuons sur un exemple à quatre lignes quatre colonnes une ou deux opérations qui vont bien nous simplifier la vie : on remplace successivement C_1 par $C_1 - C_4$ puis L_1 par $L_1 - L_4$: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. On développe par rapport à la première ligne : $|A_4| = -2|A_3| - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. On peut maintenant développer le dernier déterminant par rapport à la dernière ligne pour trouver $|A_4| = -2|A_3| - |A_2|$. En fait, ces opérations se généralisent sans problème pour la matrice A_n (je vous laisse écrire les matrices) pour donner $|A_n| = -2|A_{n-1}| - |A_{n-2}|$ (le deuxième signe ne dépend pas de la parité de n car on multiplie une première fois par $(-1)^{n+1}$ et une deuxième par $(-1)^n$, ce qui donne toujours un signe $-$ à l'arrivée).

La suite des déterminants est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 + 2x + 1 = 0$, soit $(x+1)^2$. On est en présence d'une racine double, on peut donc écrire $|A_n| = (An + B)(-1)^n$. Or, $|A_0| = 1$, donc $B = 1$, et $|A_1| = 0 = -A - B$, donc $A = -1$ (ceux qui n'aiment vraiment pas les déterminants de matrices vides utiliseront $|A_2| = -1 = 2A + B$). Finalement, $|A_n| = (-1)^{n+1}(n-1)$.

Exercice 13 (***)

1. Allons-y : $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -3 \\ -2 & 6-\lambda & 6 \\ 2 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -3 \\ -2 & 6-\lambda & 6 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -3 \\ -2 & -\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$ (on a additionné les deux dernières lignes, puis les deus dernières colonnes). Il ne reste plus qu'à développer suivant la dernière ligne : $|A-\lambda I| = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (4-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)$ (les deux racines sont évidentes, mais on peut calculer un discriminant si on est vraiment en manque).
2. Puisqu'on a déjà factorisé, la question est triviale : ce sont les valeurs 1, 2 et 4.
3. On sait que la matrice de l'application dont on cherche le noyau n'est pas inversible (puisque son déterminant est nul), donc que l'application n'est pas bijective. Comme il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie, son noyau ne peut pas être réduit au vecteur nul (elle n'est pas injective). On se retrouve donc face à trois systèmes à résoudre. Commençons par $\ker(f - id)$: $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & - & 3z & = & x \\ -2x & + & 6y & + & 6z & = & y \\ 2x & - & 2y & - & 2z & = & z \end{array}\right.$. Les deux équations extrêmes sont manifestement les mêmes. Additions les deux premières pour trouver $3y + 3z = 0$, soit $z = -y$. En reportant dans la première, on a alors $2x - z = 0$, soit $z = 2x$. Autrement dit, $\ker(f - id) = \text{Vect}((1, -2, 2))$. Passons à $\ker(f - 2\,id)$: $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & - & 3z & = & 2x \\ -2x & + & 6y & + & 6z & = & 2y \\ 2x & - & 2y & - & 2z & = & 2z \end{array}\right.$, soit $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & - & 3z & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ x & - & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$.

Les deux premières équations sont les mêmes, et en additionnant les deux dernières on trouve $y + z = 0$, soit $z = -y$. On reporte dans la première : $x + y = 0$, soit $x = -y$, donc $\ker(f - 2\,id) = \text{Vect}(1, -1, 1)$. Enfin, pour le dernier noyau : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & 2y & - & 3z & = & 0 \\ -2x & + & 2y & + & 6z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 6z & = & 0 \end{array}\right.$.
Cette fois, ce sont les deux dernières équations qui sont identiques, et en additionnant le double de la première et la troisième, on obtient $-6y - 12z = 0$, soit $y = -2z$. Ensuite, on reporte dans la première équation : $-x + z = 0$, donc $x = z$, et $\ker(f - 4\,id) = (1, -2, 1)$.

4. Il suffit de prendre la base $((1, -2, 2), (1, -1, 1), (1, -2, 1))$, dans laquelle la matrice de f sera, d'après les calculs précédents, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Bien sûr, il faudrait tout de même vérifier que c'est une base de $\mathbb{R}^3$. En fait, ce sera toujours le cas dans ce genre de situation. Notons donc u, v et w les trois vecteurs, qui vérifient $f(u) = u$, $f(v) = 2v$ et $f(w) = 4w$. Supposons maintenant que $au + bv + cw = 0$, alors $(f - id)(au + bv + cw) = 0$, soit $bv + 3cw = 0$. Appliquons maintenant $f - 2\,id$ à $bv + 3cw$ pour obtenir $6cw = 0$. On en déduit que $c = 0$ puis $b = 0$ et $a = 0$ en remontant, la famille est donc libre et constitue une base de $\mathbb{R}^3$. Les plus motivés d'entre vous prouveront plus généralement en utilisant cette technique qu'une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_k)$ de $\mathbb{R}^n$ qui sont vecteurs propres d'une même application linéaire f pour des valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ deux à deux distinctes forment nécessairement une famille libre. Sinon, vous attendrez la démonstration de votre professeur de mathématiques préféré l'an prochain.

Problème (***)

1. Puisqu'on sait que l'élève mange à l'heure 0, l'énoncé nous donne immédiatement $a_1 = c_1 = \frac{1}{2}$ et $b_1 = 0$. Pour les probabilités suivantes, on est obligés d'utiliser la formule des probabilités totales (ou de faire un arbre complet jusqu'à la troisième heure, ce qui n'est pas encore trop violent) : $a_2 = \frac{1}{4}c_1 = \frac{1}{8}$ (il ne peut travailler que s'il dormait à l'heure précédente, on sait déjà qu'il ne mangeait pas), $b_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}c_1 = \frac{3}{8}$, et $c_3 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}c_1 = \frac{1}{2}$. Sur le même principe, $a_3 = \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{4}c_2 = \frac{5}{16}$, $b_3 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}c_2 = \frac{3}{16}$ et $c_3 = \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{2}b_3 + \frac{1}{2}c_3 = \frac{1}{2}$.
2. On peut le voir comme une application de la formule de Bayes, on sait que $P_{A_2}(C_3) = \frac{1}{2}$, donc $P_{C_3}(A_2) = \dfrac{P_{A_2}(C_3) \times P(A_2)}{P(C_3)} = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{8}$.
3. Les événements A_n, B_n et C_n formant évidemment un système complet d'événements, une application directe de la formule des probabilités totales donne tout de suite $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n$; $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$ (on ne fait que généraliser les formules déjà appliquées à la première question).
4. (a) Puisqu'on a un système complet d'événements, on sait déjà que $a_n + b_n + c_n = 1$ (inutile de faire le moindre calcul, mais on peut aussi vérifier à l'aide des formules de récurrence), donc (u_n) est constante égale à 1. Pour (v_n), il est clairement plus malin de prendre $v_n = a_n + b_n - c_n$, on paur alors calculer en utilisant les relations de la question 3 : $v_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n + \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}c_n - \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}b_n - \frac{1}{2}c_n = 0$. Seule la valeur initiale v_0 est égale à 1, ensuite la suite est nulle.

   (b) Comme $u_n - v_n = 2c_n$, on en déduit imméiatement que $2c_n = 1$, soit $c_n = \frac{1}{2}$ à partir du rang 1. On peut alors réécrire les relations de récurrence pour les deux autres suites : $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{8}$, et $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{8}$. Or, on sait que $a_n + b_n + c_n = 1$, soit $b_n = \frac{1}{2} - a_n$, donc $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - a_n\right) + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}a_n$. La suite (a_n) est donc arithmético-géométrique (attention quand même, la relation n'est vraie qu'à partir du rang 1), son équation de point fixe $x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}x$ donne $x = \frac{1}{4}$, et on peut donc poser $\alpha_n = a_n - \frac{1}{4}$. Vérifions que la suite (α_n) est géométrique : $\alpha_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}a_n = -\frac{1}{2}\alpha_n$. La suite (α_n) a donc pour raison $-\frac{1}{2}$ et pour premier terme $\alpha_1 = a_1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, on en déduit que $\alpha_n = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, puis $a_n = \alpha_n + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$. Plusieurs possibilités pour en déduire la valeur de b_n, bien entendu sans refaire de calcul longs : on peut par exemple exploiter que $b_n = \frac{1}{2} - a_n = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$.

(c) La limite de (c_n) est bien sûr égale à $\frac{1}{2}$, les deux autres suites ont pour limite $\frac{1}{4}$. On en déduit qu'à long terme, le taupin va dormir la moitié du temps, manger le quart du temps et quand même travailler le quart du temps restant.

5. (a) En modifiant l'énoncé et en posant $X_n = \begin{pmatrix} c_n \\ a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ (ou en changeant la matrice P comme je vous l'ai indiqué), on pose simplement $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Il suffit de faire une petite récurrence. La propriété est sûrement vérifiée au rang 0 puisque $A^0X_0 = X_0$, et si on la suppose vraie au rang n, alors $X_{n+1} = AX_n = A \times A^nX_0 = A^{n+1}X_0$, ce qui prouve l'hérédité.

(c) Commençons donc par calculer $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{5}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{16} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$. On vérifie alors facilement que $A^3 = \frac{1}{2}(A^2 + A)$. La matrice A ne peut pas être inversible : si c'était le cas, on pourrait écrire $2A^3 - A^2 - A = A(2A^2 - A - I) = 0$, donc $2A^2 - A - I = 0$ (en multipliant par A^{-1}). Or, $2A^2 - A$ n'est pas du tout la matrice identité (ça ne marche même pas pour le premier coefficient). La matrice A n'est donc pas inversible.

(d) Utilisons par exemple la méthode du système : $\begin{cases} x \quad\quad - z = a \\ x - y + z = 2b \\ x + y + z = 2c \end{cases}$ (en multipliant par 2 les dernières équations pour ne pas trainer de fractions). La différence des deux dernières équations donne immédiatement $2y = 2c - 2b$, soit $y = c - b$. La somme des deux premières donne alors $2x - y = a + 2b$, soit $x = \frac{1}{2}a + b + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$. Enfin, $z = x - a = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$. On conclut à l'inversibilité de la matrice P, et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(e) On calcule donc $AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On prouve ensuite par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$: c'est vrai trivialement au rang 0 puisque $P^{-1}IP = I = A^0$, et en supposant la formule vraie au rang n, on aura $A^{n+1} = A \times A^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Les puissances de la matrice D étant triviales, il ne reste plus qu'un petit calcul matriciel pour terminer : $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} & 0 \end{pmatrix}$,

puis $PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} - (-\frac{1}{2})^{n+1} & \frac{1}{4} + (-\frac{1}{2})^{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} + (-\frac{1}{2})^{n+1} & \frac{1}{4} - (-\frac{1}{2})^{n+1} \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à appliquer la formule $X_n = A^nX_0$ pour retrouver $c_n = \frac{1}{2}$; $a_n = \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et $b_n = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

6. (a) La linéarité est triviale. Pour le noyau, on va évidemment résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & & & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & & & = & 0 \end{array}\right.$ (comme d'habitude, on multiplie pour éviter les fractions). On a donc $x = -2z$ et $y = z$, et la première équation est alors toujours vérifiée. On a donc $\ker(f) = \{(-2z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-2, 1, 1))$. En particulier, $\dim(\ker(f)) = 1$, et le théorème du rang nous permet d'affirmer que $\dim(\text{Im}(f)) = 2$. Pour l'image, on peut bien sûr calculer les images des vecteurs de la base canonique, ou plutôt de ces vecteurs multipliés par 4, 2 et 2 pour éviter les fractions : $\dim(\text{Im}(f)) = \text{Vect}((2, 1, 1); (1, 0, 1); (1, 1, 0))$. Le premier vecteur étant la somme des deux autres, une base de l'image est $((1, 0, 1); (1, 1, 0))$. L'application n'étant pas injective (ni surjective), ce n'est pas un automorphisme.

   (b) Encore des systèmes à résoudre. Attention, si on multiplie pour éviter les fractions, à ne pas oublier de multiplier aussi le membre de droite. Pour F, on se ramène donc à $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2x \\ x & & & + & 2z & = & 4y \\ x & + & 2y & & & = & 4z \end{array}\right.$, soit $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 4y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right.$. En soustrayant les deux dernières équations, $6z - 6y = 0$, soit $y = z$. La première équation donne alors $x = 2z$, et le système est complètement vérifié avec ces deux conditions. On en déduit que $F = \text{Vect}((2, 1, 1))$. De même, pour G, on résout $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & -x \\ x & & & + & 2z & = & -2y \\ x & + & 2y & & & = & -2z \end{array}\right.$. Cette fois, la soustraction des deux dernières équations donne $y = -z$, et la première équation donne alors $2x = -y - z$, soit $x = 0$. On en déduit aisément que $G = \text{Vect}((0, 1, -1))$.

   (c) On veut donc écrire un vecteur $u = (x, y, z)$ sous la forme $u = a(-2, 1, 1) + b(2, 1, 1) + c(0, 1, -1)$, ce qui nous ramène à nouveau à un beau système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2a & + & 2b & & & = & x \\ a & + & b & + & c & = & y \\ a & + & b & - & c & = & z \end{array}\right.$.
   Pour changer, soustrayons les deux dernières équations : $2c = y - z$, donc $c = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z$. On a donc $b - a = \frac{1}{2}x$ et $b + a = y - c = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, d'où $a = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z$ et $b = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z$. Autrement dit, $u_H = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z; -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z; -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z\right)$; $u_F = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z; \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z; \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z\right)$, et $u_G = \left(0; \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z; -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)$.

   (d) Les trois coordonnées de $p \circ p(x, y, z)$ sont respectivement égales à :
   - $\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}y + \frac{1}{8}z + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}y + \frac{1}{8}z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$
   - pareil qu'au-dessus en divisant tout par 2.
   - pareil que juste au-dessus.

   Ouf, p est bien un projecteur. On fait pareil pour q :

- 0
- $\frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z$
- $-\frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$

Là encore, on a un projecteur. Dernière vérification :

- $\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}y - \frac{1}{8}z + \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}y - \frac{1}{8}z = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z$
- pareil avec un facteur $-\frac{1}{2}$
- pareil que juste au-dessus.

Bon, on a bien nos trois projecteurs. Y a-t-il moyen d'éviter les calculs pénibles pour les composées par f ? Oui, bien sûr, par définition, quel que soit le vecteur u, $p(u) \in F$, ce qui revient à dire que $p(u) \in \ker(f - id)$, donc $f(p(u)) = p(u)$, ce qui revient à dire que $f \circ p = p$. De même, $f \circ q = -\frac{1}{2}q$ et $f \circ r = 0$.

(e) On peut toujours faire un ou deux petits calculs pour comprendre ce qui se passe : $p+q+r = id = f^0$. Ensuite, $f = f \circ id = f \circ (p+q+r) = p - \frac{1}{2}q$. Puis $f^2 = f \circ \left(p - \frac{1}{2}q\right) = p + \frac{1}{4}q$. On devine facilement que $f^n = p + \left(-\frac{1}{2}\right)^n q$, et on le démontre par une récurrence triviale (non, franchement, elle est vraiment triviale, celle-là). En reprenant les expressions de p et de q, on a donc $f^n(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z;\right.$ $\left.\frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)y + \left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)z; \frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)y + \left(\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)z\right)$.

(f) En fait c'est très simple, on a tout simplement $(c_{n+1}; a_{n+1}; b_{n+1}) = f(c_n; a_n; b_n)$. On en déduit (encore une récurrence triviale) que $(c_n, a_n, b_n) = f^n(c_0, a_0, b_0)$, ce qui permet de retrouver très facilement les valeurs prises par nos trois suites.