Feuille d'exercices n°13 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

8 mars 2016

Vrai-Faux

1. Faux, ça ne marche pas si $a > b$ (oui, je sais, c'est vraiment un piège minable).
2. Vrai, c'est même la propriété permettant de construire l'intégrale des fonctions continues à partir de celle des fonctions en escalier.
3. Faux, il faut même préciser que f est positive, sinon ça n'a aucune raison de marcher !
4. Vrai, même si dans le poly de cours on l'a simplement prouvé pour un polynôme de degré 2.
5. Faux, c'est $f^{(n+1)}(t)$ et pas $f^{(n)}(t)$.

Exercice 1 (**)

1. On effectue une intégration par parties en posant $v'(x) = x^2$ et $u(x) = \ln x$, donc $v(x) = \dfrac{x^3}{3}$ et $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, pour obtenir $I_1 = \displaystyle\int_1^e x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$.
2. Sur $[1; e]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant (\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$. En découle $0 \leqslant x^2(\ln x)^{n+1} \leqslant x^2(\ln x)^n$, puis par intégration $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite (I_n) est décroissante.
3. La suite est décroissante minorée par 0, elle converge.
4. Le plus simple est d'étudier la fonction $f : x \mapsto \ln x - \dfrac{x}{e}$. On a $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e}$, qui est positif sur l'intervalle $[1; e]$. La fonction f est donc croissante sur $[1; e]$, et $f(e) = 0$, donc f est négative sur $[1; e]$. On en déduit que $I_n \leqslant \displaystyle\int_1^e x^2 \left(\frac{x}{e}\right)^n = \frac{1}{e^n}\int_1^e x^{n+2}\, dx = \frac{1}{e^n(n+3)}$. La majoration calculée tendant vers 0, le théorème des gendarmes s'applique, et (I_n) converge vers 0.
5. Il s'agit bien sûr d'une intégration par parties, avec $u'(x) = x^2$ et $v(x) = (\ln x)^{n+1}$: $I_{n+1} = \displaystyle\left[\frac{x^3}{3}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}(n+1)(\ln x)^n = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}I_n$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{3}I_n = \frac{e^3}{3}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = \lim_{n\to+\infty} e^3 - I_n = e^3$.

Exercice 2 (**)

1. Calculons donc : $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+t}\, dt = [\ln(2+t)]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ $(\simeq 0.4)$; $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+2t}\, dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+2t)\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{2}$ $(\simeq 0.55)$; enfin, $u_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\, dt =$

$\dfrac{4}{3}\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}))^2+1}\,dt = \frac{4}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan(\sqrt{3})-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}(\simeq 0.6).$

2. Pour tout t dans $[0;1]$, on a $t^{n+1} \leqslant t^n$, donc $1+t+t^{n+1} \leqslant 1+t+t^n$ puis (tout étant positif) $\dfrac{1}{1+t+t^{n+1}} \geqslant \dfrac{1}{1+t+t^n}$. En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on obtient $u_{n+1} \geqslant u_n$, la suite (u_n) est donc croissante.
3. Il faut réussir à majorer intelligemment ce qui se trouve sous l'intégrale, en l'occurence en constatant que $\forall t \in [0;1]$, $1+t+t^n \geqslant 1+t$, donc $\dfrac{1}{1+t+t^n} \leqslant \dfrac{1}{1+t}$. En intégrant l'inégalité, on obtient $u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$ (la majoration doit être guidée par le fait qu'on veut obtenir $\ln(2)$ à la fin).
4. La suite (u_n) est donc croissante et majorée, elle converge.
5. En utilisant le calcul fait un peu plus haut, on a $\ln 2 - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n}\,dt.$
6. Il suffit d'arriver à majorer ce qui se trouve sous l'intégrale : $\dfrac{1}{1+t}-\dfrac{1}{1+t+t^n} = \dfrac{1+t+t^n-(1+t)}{(1+t)(1+t+t^n)} = \dfrac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}$. Or, ce magnifique dénominateur est certainement plus grand que 1 quand $t \in [0;1]$, donc $\dfrac{1}{1+t} - \dfrac{1}{1+t+t^n} \leqslant t^n$, et en intégrant cette inégalité on a $\ln 2 - u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$
7. On a vu plus haut que $u_n \leqslant \ln 2$, donc $\ln 2 - u_n \geqslant 0$. Comme on vient de majorer par ailleurs cette même expression par quelque chose qui tend vers 0, un coup de théorème des gendarmes nous donne $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln 2 - u_n) = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

Exercice 3 (*)

1. Allons-y : $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$, puis $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t}\,dt = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t}\,dt = 1 - I_0 = 1-\ln(2)$, et enfin $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{t^2+t}{1+t} - \frac{t}{1+t}\,dt = \int_0^1 t\,dt - I_2 = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - (1-\ln(2)) = \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) = \ln(2) - \frac{1}{2}.$
2. Même pas besoin de s'embêter à déterminer la monotonie de la suite (qui est en l'occurence décroissante) : comme $\dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ sur $[0,1]$, on peut encadrer I_n en écrivant $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème des gendarmes pour conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
3. Pour une fois, inutile de faire une intégration par parties, il vaut mieux procéder astucieusement en généralisant les calculs de la première question : $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{t^{n+1}+t^n}{1+t}\,dt - I_n = \int_0^1 t^n\,dt - I_n = \frac{1}{n+1} - I_n.$

4. Méthode « avec les mains » : $I_0 = 1 - I_1 = 1 - \frac{1}{2} + I_2 = \cdots = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + (-1)^n I_n$.
Autrement dit, $\ln(2) = S_n + (-1)^n I_n$, ou encore $S_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n$.
5. Il n'y a plus rien à faire d'autre que de constater : $\lim_{n \to +\infty} S_n = \ln(2)$.

Exercice 4 (***)

Je vous sens tous venir avec votre récurrence, oubliez-là, ça ne sert à rien. Observer ce qui se passe pour les petites valeurs de n peut être utile. Ainsi, pour $n = 0$, le résultat est une conséquence du fait qu'une fonction (non nulle) de signe constant sur un intervalle ne peut pas avoir une intégrale nulle. Pour $n = 1$, raisonnons par l'absurde en supposant que f ne s'annule qu'une seule fois, disons en c. Alors la fonction est (par exemple) strictement positive sur $[0, c]$ et strictement négative sur $[c, 1]$ (si c'est le contraire, on prend $-f$ qui vérifie également les hypothèses de l'énoncé). L'astuce est alors de constater que la fonction $g : t \mapsto (c - t)f(t)$ est de signe constant sur $[0, 1]$, en l'occurence positive (puisque les deux facteurs sont positifs si $t \leqslant c$ et les deux sont positifs si $t \geqslant c$). Pourtant, $\int_0^1 (t-c)f(t)\ dt = \int_0^1 tf(t)\ dt - c\int_0^1 f(t)\ fdt = 0 - c \times 0 = 0$. La fonction n'étant pas tout le temps nulle sur $[0, 1]$, on tient une absurdité.

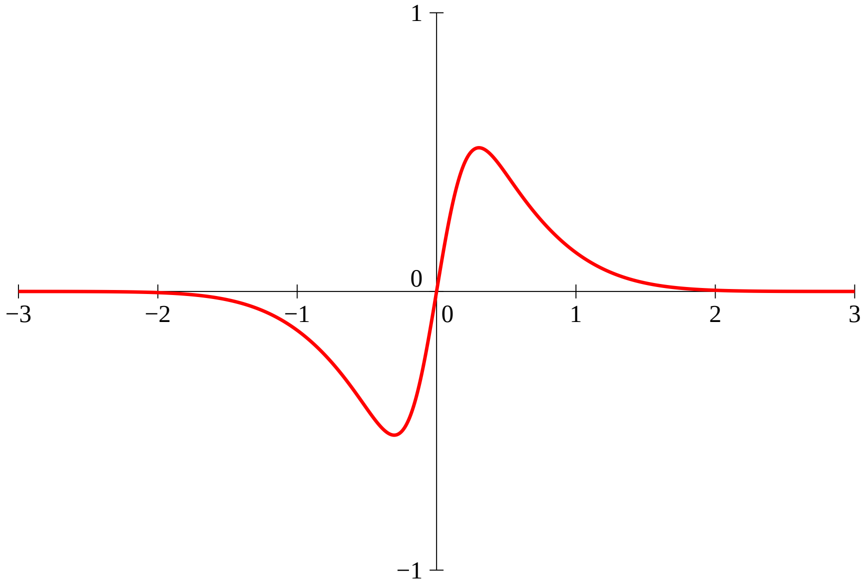
Généralisons ce résultat, en raisonnant par l'absurde dans le cas général. Supposons que f s'annule exactement n fois (si elle s'annule moins, c'est encore plus facile) en $c_1 < c_2 < \dots c_n$ en changeant de signe à chaque fois (si f ne change pas de signe, on enlève purement et simplement la valeur correspondante). Notons alors $P = (t - c_1)(t - c_2) \dots (t - c_n)$. Ce polynôme change lui aussi de signe en c_1, c_2, …, c_n, dont le produit $Pf(t)$ est de signe constant sur $[0, 1]$. Pourtant, son intégrale est nulle. En effet, quel que soit le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_i X^i$ de degré n (ou moins), par linéarité de l'intégrale, $\int_0^1 P(t)f(t)\ dt = \sum_{k=0}^{n} a_i \int_0^1 t^i f(t)\ dt = 0$. Là encore, on a une contradiction, la fonction f ne peut donc pas s'annuler moins de $n + 1$ fois.

Exercice 5 (***)

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction qu'on intègre est définie partout. Par ailleurs, la fonction intégrée est paire, ce qui permet de prouver que f est impaire : en faisant le changement de variables $u = -t$, $f(-x) = \int_{-x}^{-4x} e^{-t^2}\ dt = \int_x^{4x} -e^{-u^2}\ du = -f(x)$. En notant $g(t) = e^{-t^2}$ et G une primitive de g, on peut écrire $f(x) = G(4x) - G(x)$, donc $f'(x) = 4g(4x) - g(x) = 4e^{-16x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2}(4e^{-15x^2} - 1)$. La dérivée s'annule lorsque $e^{-15x^2} = \frac{1}{4}$, soit $-15x^2 = -2\ln(2)$, donc $x = \pm\sqrt{\frac{2\ln(2)}{15}}$. La seule limite à calculer est en $+\infty$, si $x \geqslant 0$ on peut majorer e^{-t^2} par e^{-x^2} sur $[x, 4x]$, donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{4x} e^{-x^2}\ dt = 3xe^{-x^2}$, qui a une limite nulle en $+\infty$ par croissance comparée. Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. On peut résumer ces informations dans le tableau de variations suivant (inutile d'essayer de calculer les valeurs des extrema, on note x_1 et $-x_1$ leurs abscisses pour simplifier) :

x	$-\infty$		$-x_1$		0		x_1		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-f(x_1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	0

Et voici une allure de la courbe :

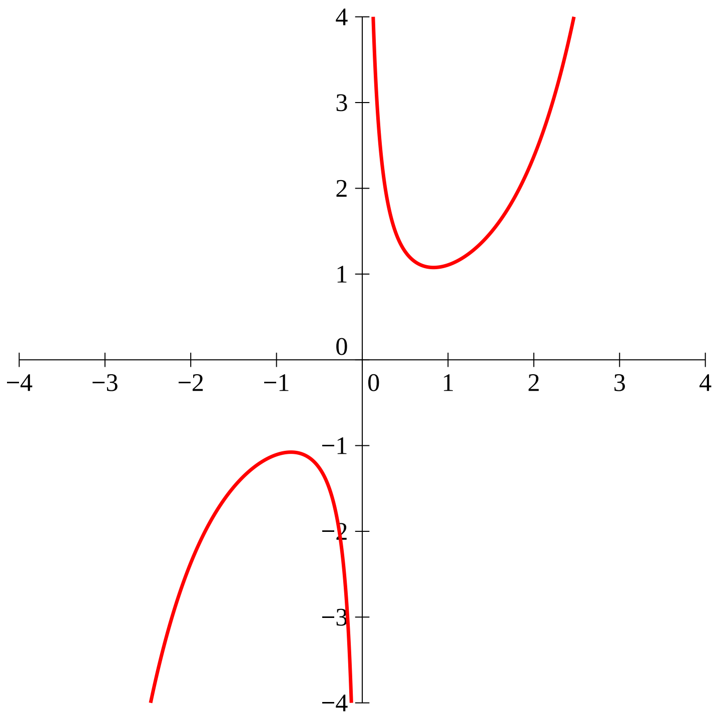


- Les techniques seront toujours les mêmes. Ici, la fonction à intégrer est définie sur $\mathbb{R}^*$ (et n'est pas prolongeable par continuité en 0), donc g sera définie également sur $\mathbb{R}^*$ (si $x \neq 0$, $0 \notin [x, 2x]$). La fonction g est par ailleurs impaire comme intégrale d'une fonction paire, comme on vient de le prouver pour la fonction précédente. On se contentera donc d'étudier la fonction g sur $\mathbb{R}^{+*}$. On dérive comme d'habitude : en posant $f(t) = \dfrac{\operatorname{ch}(t)}{t^2}$ et F une primitive de f, alors $g(x) = F(2x) - F(x)$, donc $g'(x) = 2f(2x) - f(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(2x) - 2\operatorname{ch}(x)}{2x^2}$. Or, $\operatorname{ch}(2x) = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - 2}{2} = 2\operatorname{ch}^2(x) - 1$, donc $g'(x)$ est du signe de $2\operatorname{ch}^2(x) - 2\operatorname{ch}(x) - 1$. En posant $X = \operatorname{ch}(x)$, on est ramenés à la résolution de l'équation $2X^2 - 2X - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 12$, et admet pour racines $X_1 = \dfrac{2 + \sqrt{12}}{4} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$, et $X_2 = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$. On ne garde que la première racine, la seconde étant plus petite que 1 et ne pouvant convenir comme valeur de $\operatorname{ch}(x)$. On est maintenant ramenés à résoudre l'équation $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$, soit $e^x + e^{-x} = 1 + \sqrt{3}$. En posant cette fois-ci $X = e^x$, on se retrouve à devoir résoudre $X^2 - (1 + \sqrt{3})X + 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = (1 + \sqrt{3})^2 - 4 = 2\sqrt{3}$, et pour racines $X_3 = \dfrac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$, et $X_4 = \dfrac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$. La deuxième valeur est inférieure à 1 car $2\sqrt{3} > 3$, donc mènera à une valeur de x négative qui ne nous intéresse pas (qui est en fait l'opposé de celle qu'on va garder). On se contentera de garder comme valeur d'annulation de g' le nombre $x_0 = \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\right)$. Ouf ! Évidemment, voilà encore une valeur pour laquelle on sera incapable de déterminer ne serait-ce qu'une valeur approchée du maximum.
  On peut par contre déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$: $\forall t \in [x, 2x]$, $\operatorname{ch}(x) \leqslant \operatorname{ch}(t) \leqslant \operatorname{ch}(2x)$, et $\dfrac{1}{4x^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$, donc $\dfrac{\operatorname{ch}(x)}{4x^2} \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{\operatorname{ch}(2x)}{x^2}$, puis par intégration sur le segment

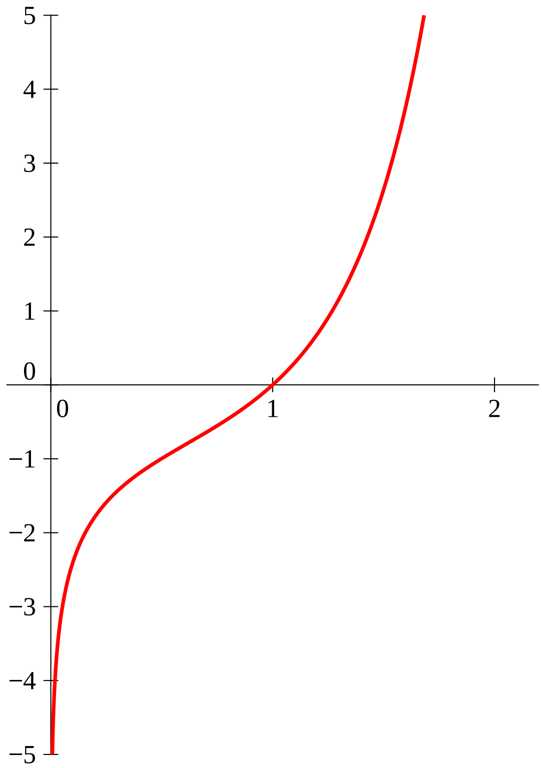
$[x,2x]$, $\dfrac{\operatorname{ch}(x)}{4x} \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{\operatorname{ch}(2x)}{x}$. Par croissance comparée, le membre de gauche tend vers $+\infty$ en $+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (il y aura même une branche parabolique de direction (Oy). En 0, chacun des deux membres tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. On en déduit évidemment les limites en 0^- et en $-\infty$ par imparité de la fonction, et on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-x_0$		0		x_0		$+\infty$
			$-f(x_0)$		$-\infty$ || $+\infty$				$+\infty$
g		$\nearrow$		$\searrow$	||	$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$						$f(x_0)$		

Et une allure de la courbe :



- Et une dernière pour la route, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ (et n'est pas prolongeable par continuité en 0), donc $h(x)$ existe si $0 \notin [x, x^2]$, ce qui est le cas si $x > 0$. Autrement dit, $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}^{+*}$. Comme d'habitude, $h(x) = F(x^2) - F(x)$, donc $h'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \dfrac{2xe^{x^2}}{x^2} - \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{2e^{x^2} - e^x}{x}$. Cette dérivée est du signe de $2e^{x^2} - e^x = e^x(2e^{x^2-x} - 1)$. Elle est positive lorsque $x^2 - x \geqslant -\ln(2)$, or $x^2 - x$ admet son minimum en $\dfrac{1}{2}$, de valeur $-\dfrac{1}{4} \geqslant -\ln(2)$. La fonction h est donc croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. On peut ajouter facilement que $h(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 1$, mais $h(x) \leqslant 0$ sur $]0,1]$ puisque les bornes de l'intégrale sont alors « dans le mauvais sens ». Les limites sont assez faciles à calculer : $\forall x \geqslant 1$, $h(x) \geqslant \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^x}{x^2}\,dt = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x$, ce qui suffit à prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$. Par ailleurs, $\forall x \in]0,1]$, $h(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t}\,dt$ (n'oubliez pas que les bornes sont dans le mauvais sens), donc $h(x) \leqslant \ln(x^2) - \ln(x) = \ln(x)$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$. Pas de tableau de variations cette fois-ci (il n'y aurait pas grand chose à mettre dedans), on se contentera d'une dernière allure de courbe :



Exercice 6 (***)

1. (a) Prenons deux réels x et y dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$. On a alors $e^{-tx} > e^{-ty}$ pour tout $t \in [0;1]$. De même $t^k e^{-tx} > t^k e^{-ty}$ et on peut intégrer cette inégalité, ce qui donne exactement $f_k(x) > f_k(y)$, donc f_k est bien décroissante.

   (b) On a $f_k(0) = \displaystyle\int_0^1 t^k \, dt = \frac{1}{k+1}$. La suite $(f_k(0))$ est donc décroissante et tend vers 0. Or, f_k étant positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $\forall x > 0$, $0 \leqslant f_k(x) \leqslant \dfrac{1}{k+1}$, ce qui suffit à assurer via le théorème des gendarmes que $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

2. (a) Il s'agit de faire une IPP en posant $u(t) = t^{k+1}$ et $v'(t) = e^{-tx}$, donc $u'(t) = (k+1)t^k$ et $v(t) = -\dfrac{e^{-tx}}{x}$ (faites bien gaffe que la variable ici est t et x est donc une constante). On obtient $f_{k+1}(x) = \left[-t^{k+1}\dfrac{e^{-tx}}{x}\right]_0^1 + (k+1)\displaystyle\int_0^1 t^k \frac{e^{-tx}}{x} \, dx = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{k+1}{x} f_k(x)$.

   (b) On a $f_0(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-tx} \, dt = \left[-\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^1 = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1-e^{-x}}{x}$. On peut utiliser la question précédente pour calculer les fonctions suivantes : $f_1(x) = \dfrac{1}{x} f_0(x) - \dfrac{e^{-x}}{x} = \dfrac{1}{x^2}(1 - e^{-x} - xe^{-x})$, puis $f_2(x) = \dfrac{2}{x} f_1(x) - \dfrac{e^{-x}}{x} = \dfrac{1}{x^3}(2 - 2e^{-x} - 2xe^{-x} - x^2 e^{-x})$.

   (c) Il suffit de reprendre l'expression trouvée : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 1 - e^{-x} = 1$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x f_0(x) = 1$.

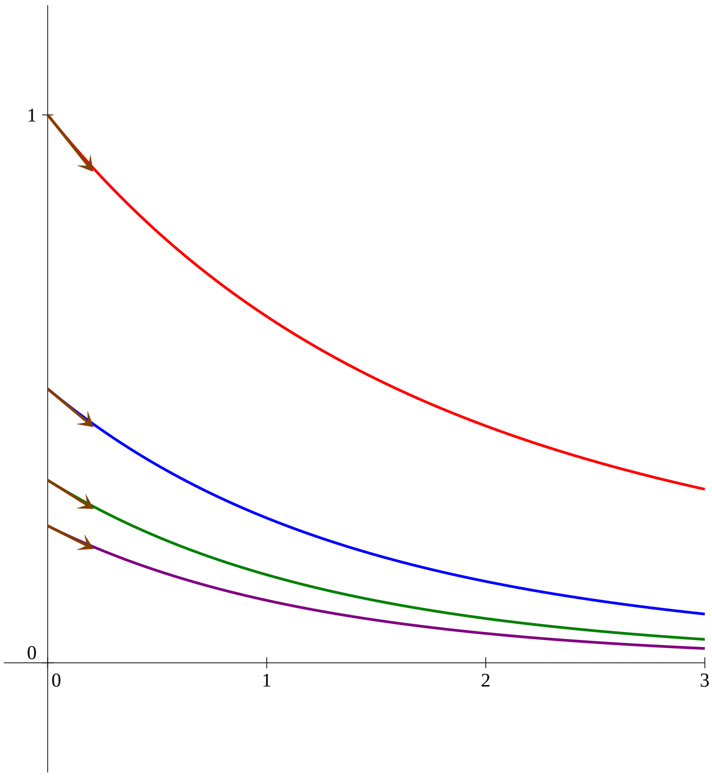
3. (a) Le changement de variable est $u = tx$, qui donne $du = x \, dt$, et change les bornes de l'intégrale en 0 et x, ce qui donne donc $f_k(x) = \displaystyle\int_0^1 t^k e^{-tx} \, dt = \int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^k e^{-u} \, \frac{du}{x} = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u} \, du$.

(b) On vient d'écrire $f_k(x)$ sous la forme d'un produit $g(x)h(x)$, où $g(x) = \dfrac{1}{x^{k+1}}$, et donc $g'(x) = -\dfrac{k+1}{x^{k+2}}$, et $h(x) = \displaystyle\int_0^x u^k e^{-u}\,du$, donc $h'(x) = x^k e^{-x}$. On en déduit que $f_k'(x) = -\dfrac{k+1}{x^{k+2}}h(x) + \dfrac{1}{x^{k+1}}x^k e^{-x} = -\dfrac{k+1}{x}f_k(x) + \dfrac{e^{-x}}{x}$. On vient donc de montrer, en reprenant le résultat de la question 2.a, que $f_k' = -f_{k+1}$.

(c) On étudie la fonction $y \mapsto 1 - e^{-y} - y$ sur $\mathbb{R}^+$. sa dérivée vaut $e^{-y} - 1$, qui est négative sur l'intervalle d'étude. Or, pour $y = 0$, la fonction est nulle. Elle est donc bien négative sur $\mathbb{R}^+$.

On a donc $f_k(x) - f_k(0) = \displaystyle\int_0^1 t^k e^{-tx}\,dt - \int_0^1 t^k\,dt = \int_0^1 t^k(e^{-tx} - 1)\,dt \geqslant \int_0^1 t^{k+1}x\,dt = \dfrac{x}{k+2}$. Quand x tend vers 0, ceci tend vers 0. Comme par ailleurs $f_k(x) - f_k(0)$ est négatif puisque f_k est décroissante, la fonction f_k est bien continue en 0.

Pour la dérivée, on utilise ce bon vieux théorème du prolongement de la dérivée ! La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f_k' = -f_{k+1}$. On vient de voir que f_{k+1} était continue en 0, donc $\lim\limits_{x\to 0} f_{k+1}(x) = f_{k+1}(0) = \dfrac{1}{k+2}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f_k'(x) = -\dfrac{1}{k+2}$ puis que f_k est dérivable en 0, de dérivée $f_k'(0) = -\dfrac{1}{k+2}$. Les courbes des fonctions f_k sont assez décevantes, mais voici l'allure des quatre premières (f_0 à f_3, de haut en bas), les valeurs et tangentes en 0 correspondant évidemment aux valeurs calculées) :



Exercice 7 (**)

- Le but est donc de faire apparaitre une somme de Riemann, ce qui consiste en gros à sortir un $\dfrac{1}{n}$ de la somme et à exprimer ce qui reste dans la somme en fonction de $\dfrac{k}{n}$ uniquement : $u_n =$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Le théorème de convergence des sommes de Riemann permet alors d'affirmer que (u_n) converge et que sa limite vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$.

- Même méthode : $\displaystyle v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$, donc (v_n) converge vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\,dx = \left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1 = \sqrt{3}-1$.
- Pour w_n, c'est un peu plus subtil, il vaut mieux étudier $\ln(w_n)$ et surtout se rendre compte que $\ln(n!) = \ln(1\times 2\times\cdots\times n) = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n$. On a alors : $\displaystyle\ln w_n = \frac{1}{n}(\ln((2n)!) - n\ln n - \ln(n!)) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{k=2n}\ln k - n\ln n - \sum_{k=1}^{k=n}\ln k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{k=2n}(\ln k - \ln n) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{k=2n}\ln\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\ln\frac{n+k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$, donc $(\ln w_n)$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \int_1^2 \ln u\,du = [x\ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 1$, et (w_n) converge vers $e^{2\ln 2-1} = \dfrac{4}{e}$.

Exercice 8 (****)

1. En n'oubliant pas l'hypothèse $\pi = \dfrac{p}{q}$, $P_n(X-\pi) = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{p}{q}-X\right)^n (p-p+qX)^n = \dfrac{1}{n!}\dfrac{p-qX)^n}{q^n}\times q^nX^n = P_n(X)$.
2. Si $\pi = \dfrac{p}{q}$, $p-qt$ est positif sur $[0,\pi]$, donc l'intégrale est celle d'une fonction positive, elle est positive.
3. Prouvons-le pour 0 : comme il est racine de multiplicité n de P_n, il annule déjà toutes les dérivées k-èmes lorsque $k<n$. Supposons désormais $k>n$, en appliquant la formule de Leibniz au produit $X^n(p-qX)^n$, la seule dérivée de X^n ne s'annulant pas en 0 est la dérivée n-ème, qui vaut $n!$, donc $P_n^{(k)}(0) = \dfrac{1}{n!}\dbinom{n}{k}n!((p-qX)^n)^{(k-n)}(0)$. Les $n!$ se simplifient, le coefficient binômial est un entier, il suffit de prouver que la dérivée restante est aussi entière. Elle sera nulle si $k-n>n$, soit $k<2n$, sinon $((p-qX)^n)^{(k-n)} = n(n-1)\dots(2n-k+1)(p-qX)^{2n-k}$, qui prend pour valeur en 0 le nombre $\dfrac{n!}{(2n-k)!}p^{2n-k}$, qui est certainement un entier. On a bien prouvé que $P_n^{(k)}(0)$ était toujours un entier. Comme $P_n(\pi-X) = P_n(X)$, $P_n^{(k)}(\pi) = (-1)^kP_n^{(k)}(0)$ est également un entier.
4. Pour $n=0$, $I_0 = \displaystyle\int_0^\pi \sin(t)\,dt = [-\cos(t)]_0^\pi = 2\in\mathbb{N}$. Prenons maintenant un entier supérieur ou égal à 1, et effectuons deux intégrations par partie successives (en dérivant P_n à chaque fois), en exploitant le fait que P_n s'annule en 0 et en π (c'est le cas de tous les polynômes P_n à partir de $n=1$) et, comme on vient de le voir, que les dérivés P_n' prennent des valeurs entières en 0 et en π. On calcule donc $I_n = [-P_n(t)\cos(t)]_0^\pi + \displaystyle\int_0^\pi P_n'(t)\cos(t)\,dt = \int_0^\pi O_n'(t)\cos(t)\,dt$ (le crochet s'annule) $= [P_n'(t)\sin(t)]_0^\pi - \displaystyle\int_0^\pi P_n''(t)\sin(t)\,dt = -\int_0^\pi P''(t)\sin(t)\,dt$. Bon, ben il ne reste plus qu'à recommencer, en faisant attention au fait que les crochets ne vont pas continuer à tous s'annuler : à l'étape suivante $P''(t)\cos(t)$ ne s'annule plus en 0 et en π. Par contre ce qui est certain, c'est qu'il prend une valeur entière en 0 et en π, donc on

peut écrire $I_n = a_3 - \int_0^\pi P^{(3)}(t)\cos(t)\ dt = a_3 + \int_0^\pi P^{(4)}(t)\sin(t)\ dt$, avec $a_3 \in \mathbb{Z}$. Et on continue. À chaque étape, le premier crochet donnera un nombre entier, et le second s'annulera, pour donner $I_n = a_{2k-1} + (-1)^k \int_0^\pi P^{(2k)}(t)\sin(t)\ dt$, avec $a_{2k-1} \in \mathbb{Z}$. Pour être rigoureux, ça se démontre bien sûr par récurrence : on a vu plus haut que c'était vrai pour $k = 1$ et $k = 2$ et en le supposant au rang k, avec deux IPP de plus, $I_n = a_{2k-1} + \int_0^\pi P^{(2k)}(t)\sin(t)\ dt = a_{2k-1} + [(-1)^{k+1}P^{(2k)}(t)\cos(t)] + (-1)^k \int_0^\pi P^{(2k+1)}(t)\cos(t)\ dt = a_{2k+1} + [(-1)^k P^{(2k+1)}(t)\sin(t)]_0^\pi + (-1)^{k+1} \int_0^\pi P^{(2k+2)}(t)\sin(t)\ dt$, où a_{2k+1} est égal à a_{2k-1} plus la valeur du crochet avec le cosinus, ce qui donne bien à nouveau un nombre entier. Par principe de récurrence, la formule est vraie pour tout entier k, et en particulier pour $k = n$, valeur pour laquelle $\int_0^\pi P^{(2k)}(t)\sin(t)\ dt = 0$, puisque $P^{(2n)} = 0$. Il ne reste plus alors que $I_n = a_{2n-2} \in \mathbb{Z}$. Comme par ailleurs $I_n \geqslant 0$, $I_n \in \mathbb{N}$.

5. La fonction $x \mapsto x(p - qx)$ étant continue sur $[0, \pi]$, elle y atteint un maximum M (qu'on peut d'ailleurs calculer explicitement si on le souhaite), donc $P_n(t) \leqslant \frac{1}{n!}M^n$ sur $[0, \pi]$, et $I_n \leqslant \int_0^\pi \frac{M^n}{n!}\sin(t)\ dt = \frac{2M^n}{n!}$, qui a une limite nulle quand n tend vers $+\infty$. Puisque la suite est constituée de nombres entiers, elle est forcément nulle à partir d'un certain rang n_0 (par application de la définition de la limite avec par exemple $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on doit avoir $-\frac{1}{2} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2}$ à partir d'un certain rang, donc $I_n = 0$). Mais comme on a vu que la fonction sous l'intégrale était toujours positive sur $[0, \pi]$, avoir une intégrale nulle signifie que $P_n(t)\sin(t)$ vaut toujours 0 entre 0 et π. En particulier, le polynôme P_n doit s'annuler une grosse infinité de fois (puisque sin ne s'annule qu'une seule fois sur l'intervalle), ce qui implique que P_n est le polynôme nul. Voilà une grosse absurdité, P_n n'est manifestement pas égal à 0, donc notre hypothèse de départ est fausse et π ne peut pas être rationnel.

Exercice 9 (***)

1. Allons-y : $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\ dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
2. Il suffit de penser à effectuer le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ (donc $du = -dt$), qui se contente d'échanger les bornes de l'intégrale et surtout de transormer le sin en $\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos(u)$. On obtient alors immédiatement $I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\cos^n(u)\ du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u)\ du$.
3. Il faut penser pour l'IPP à poser $u(t) = \sin^{n+1}(t)$ et $v'(t) = \sin(t)$, donc $u'(t) = (n + 1)\cos(t)\sin(^t)$ et $v(t) = -\cos(t)$, pour obtenir $I_n = [-\cos(t)\sin^n(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^n(t)\ dt = 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(t))\sin^n(t)\ dt = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) - \sin^{n+2}(t)\ dt = (n+1)(I_n - I_{n+2})$. On en déduit que $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, soit $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$.
4. D'après la question précédente, $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p}I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{2p(2p-2)}I_{2p-4} = \dots$ $= \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2}I_0 = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\dots 2\times 1}{(2p^2)(2p-2)^2\dots 2^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p^2(p-1)^2\dots 1^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2}$. De même, $I_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 3} \times I_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

5. Puisque le sinus est positif entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (et évidemment plus petit que 1), on a $\sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$ sur cet intervalle, donc par intégration $I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite est donc décroissante. Elle est positive donc minorée, donc convergente.
6. Il suffit d'appliquer la décroissance de la suite (I_n) pour obtenir $\frac{I_n}{I_n} \leqslant \frac{I_n}{I_{n+1}} \leqslant \frac{I_n}{I_{n+2}}$, soit $1 \leqslant \frac{I_n}{I_{n+1}} \leqslant \frac{n+1}{n+2}$ en reprenant le résultat de la question 3. Puisque le membre de droite a pour limite 1, une simple application du théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$.
7. Plusieurs possibilités ici. Soit on reprend les formules obtenues à la question 4 et on constate de grosses simplifications : $I_{2n+1}I_{2n} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \times \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} = \frac{\pi}{2 \times (2n+1)}$, et de même $I_{2n}I_{2n-1} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} \times \frac{2^{2n-2}(n-1!)^2}{(2n-1)!} = \frac{2n\pi}{2^3n^2} = \frac{\pi}{2 \times 2n}$. Dans les deux cas, que n soit pair ou impair, $I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2(n+1)}$.
   Autre possibilité, constater que $(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n$ en reprenant la relation de la question 3, donc la suite $((n+1)I_{n+1}I_n)$ est constante égale à son premier terme $I_1I_0 = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 10 (***)

1. La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ étant paire, $\int_{-x}^0 e^{t^2}\,dt = \int_0^x e^{t^2}\,dt$, et $f(-x) = -f(x)$ (attention à l'inversion des bornes dans l'intégrale !), le facteur e^{-x^2} restant lui inchangé.
2. On peut très simplement dériver f comme un produit, la dérivée de $x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$ étant égale à e^{x^2}. On obtient alors $f'(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt + e^{-x^2}e^{x^2} = -2xf(x) + 1$. La fonction f est donc solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.
3. C'est loin d'être évident (bien sûr, d'après la question précédente, cela revient à montrer que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$, mais ce n'est pas plus facile). On commence par effectuer une IPP sur $\int_1^x e^{t^2}\,dt$ (pour faire apparaitre le terme prépondérant dans $f(x)$, méthode classique même si c'est assez brutal ici, et qu'on est obligés de partir de 1 et pas de 0 vu le calcul qu'on va faire ensuite) en posant $u'(t) = 2te^{t^2}$, donc $u(t) = e^{t^2}$, et $v(t) = \frac{1}{2t}$, donc $v'(t) = -\frac{1}{2t^2}$, pour obtenir $\int_1^x e^{t^2}\,dt = \left[\frac{e^{t^2}}{2t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\,dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2}\,dt$. On en déduit que $1 - 2xf(x) = 1 - 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{t^2}\,dt - 2xe^{-x^2}\int_1^x e^{t^2}\,dt = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{t^2}\,dt + exe^{-x^2} + xe^{-x^2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt$. Le premier terme a une limite nulle par croissance comparée (l'intégrale de 0 à 1 étant une constante), le deuxième terme tend également vers 0 (toujours de la croissance comparée). Reste le troisième. Le dernier morceau (avec l'intégrale de 1 à x), pose encore des problèmes : on a bien envie de majorer la fonction dans l'intégrale pour obtenir quelque chose de calculable qui tend vers 0, mais en majorant e^{t^2} par e^{x^2} sur $[1, x]$, par exemple, la majoration obtenue n'est pas suffisante (on majore par une constante). Il vaut mieux couper en deux sous la forme $xe^{-x^2}\int_1^{x-1} \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt + xe^{-x^2}\int_{x-1}^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt$. Dans le

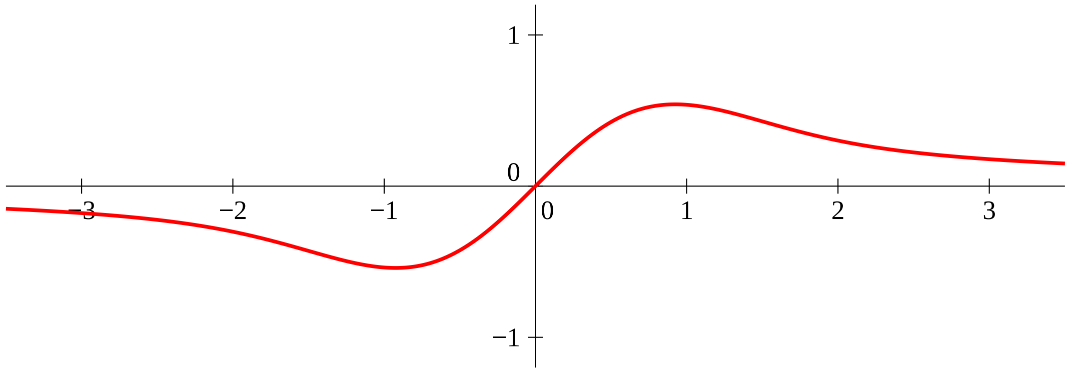
premier morceau (en supposant $x \geqslant 2$), on majore e^{t^2} par $e^{(x-1)^2}$ et $\dfrac{1}{t^2}$ par 1 pour trouver $xe^{-x^2} \displaystyle\int_1^{x-1} \frac{e^{t^2}}{t^2}\, dt \leqslant xe^{-x^2} \times e^{(x-1)^2} \int_1^{x-1} 1\, dt = x(x-2)e^{-2x+1}$. Cette quantité a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$ (encore de la croissance comparée). Dans le dernier morceau, on se contente de majorer le numérateur, en gardant le dénominateur intact : $xe^{-x^2} \displaystyle\int_{x-1}^{x} \frac{e^{t^2}}{t^2}\, dt \leqslant x \int_{x-1}^{x} \frac{1}{t^2}\, dt = x\left[-\frac{1}{t}\right]_{x-1}^{x} = x\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x-1}$. Ouf, ça tend encore vers 0, et achève notre démonstration : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 2xf(x) = 1$!

4. Au vu de la relation trouvée à la deuxième question, $g(x) = \dfrac{e^{x^2}}{2x}(1-2xf(x)) = \dfrac{e^{x^2}}{2x} - \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt$. On dérive pour obtenir $g'(x) = \dfrac{4x^2e^{x^2} - 2e^{x^2}}{4x^2} - e^{x^2} = -\dfrac{e^{x^2}}{2x^2} < 0$, donc la fonction g est effectivement décroissante. Étant continue, elle est nécessairement bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ vers un intervalle inconnu. Comme $f(0) = 0$, $\displaystyle\lim_{x \to 0} 1 - 2xf(x) = 1$, et $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$. Inutile de chercher la limite de g en $-\infty$, puisque l'énoncé prétend que la fonction s'annule entre 0 et 1, vérifier que $g(1) < 0$ suffit, ce qui découle du fait que $1 - 2f(1) < 0$. Or, $1 - 2f(1) = 1 - \dfrac{2}{e}\displaystyle\int_0^1 e^{t^2}\, dt$. Il faudrait donc que $\displaystyle\int_0^1 e^{t^2}\, dt > \frac{e}{2}$. Malheureusement, cette intégrale n'est pas calculable de façon exacte. On en connait toutefois des valeurs approchées précises (par exemple quand on a des tables de loi normale sous la main !), et l'inégalité est effectivement vérifiée (si vous avez beaucup de temps à perdre, effectuez la méthode des rectangles pour le vérifier).

5. D'après la question précédente, g, et donc f', est positive sur $[0, x_0[$ et négative ensuite. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0, x_0[$, et décroissante ensuite. On sait évidemment que $f(0) = 0$, et les limites de f aux infinis sont nulles puisque $2xf(x)$ tend elle-même vers 0. En utilisant de plus l'imparité de la fonction, on peut dresser le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-x_0$		0		x_0		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-f(x_0)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	0

6. Inutile de chercher à calculer la valeur des extrema, mais on sait déjà que $f(1) \geqslant \dfrac{1}{2}$, ce qui donne une borne inférieure (vu le peu d'écart entre les deux valeurs, on peut se douter que x_0 est proche de 1 et le maximum proche également de $\dfrac{1}{2}$). La courbe représentative de f ressemble en fait à ceci :


1
0
−3
−2
−1
0
1
2
3
−1