

Feuille d'exercices n°13 : Intégration

PTSI B Lycée Eiffel

5 mars 2015

Vrai-Faux

1. Si f est une fonction positive, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.
2. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors il existe une fonction en escalier φ telle que, $\forall x \in [a, b], |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$, quel que soit le réel $\varepsilon > 0$.
3. Si $\int_a^b f(t) dt = 0$, avec f continue, alors f est nulle sur $[a, b]$.
4. La méthode de Simpson donne une valeur exacte de l'intégrale pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
5. Le reste intégral de la formule de Taylor est donné par la formule $R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) dt$.

Exercice 1 (**)

On définit, pour tout entier n , l'intégrale $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_1 .
2. Montrer que sur $[1; e]$, on a $(\ln x)^{n+1} \leq (\ln x)^n$, et en déduire le sens de variation de I_n .
3. Montrer que (I_n) est convergente.
4. Montrer que sur $[1; e]$, $0 \leq \ln x \leq \frac{x}{e}$. En déduire la limite de I_n .
5. Montrer que $\forall n \geq 1, I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$. En déduire la limite de nI_n .

Exercice 2 (**)

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2 .
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ln 2$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Pour tout n de \mathbb{N} , écrire $\ln 2 - u_n$ sous la forme d'une intégrale.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln 2 - u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
7. Donner la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3 (*)

On considère la suite définie par $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

1. Calculer I_0 , I_1 et I_2 .
2. Déterminer la limite de la suite (I_n) .
3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .
4. On note désormais $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, exprimer S_n en fonction de I_n .
5. Dédire des questions précédentes la convergence et la limite de la suite (S_n) .

Exercice 4 (***)

Soit f une fonction telle que $\forall k \leq n, \int_0^1 t^k f(t) dt = 0$, montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[0; 1]$.

Exercice 5 (***)

Étudier les fonctions suivantes :

- $f(x) = \int_x^{4x} e^{-t^2} dt$
- $g(x) = \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch}(t)}{t^2} dt$
- $h(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$

Exercice 6 (***)

Pour tout entier naturel k on considère la fonction f_k définie sur \mathbb{R}^+ par la relation

$$f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt$$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel k , la fonction f_k est décroissante sur \mathbb{R}^+ .
(b) Étudier la suite $(f_k(0))_{k \geq 0}$. En déduire, pour tout réel positif x , la limite de la suite $(f_k(x))_{k \geq 0}$.
2. (a) Soit $x > 0$. Établir que $f_{k+1}(x) = \frac{k+1}{x} f_k(x) - \frac{e^{-x}}{x}$ pour tout $k \geq 0$.
(b) Expliciter les fonctions f_0 , f_1 et f_2 .
(c) Montrer que, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f_0(x) = 1/x$.
3. (a) En effectuant un changement de variable, montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0, f_k(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u} du$.
En déduire que f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
(b) Trouver une relation simple entre f'_k et f_{k+1} .
(c) Montrer que pour tout réel $\forall y \geq 0, 1 - e^{-y} \leq y$. En déduire que pour tout entier naturel k , la fonction f_k est continue en 0. Est-elle dérivable à droite en ce point ?

Exercice 7 (**)

Déterminer les limites de chacune des suites suivantes en utilisant des sommes de Riemann.

$$\bullet u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} \quad \bullet v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} \quad \bullet w_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 8 (****)

Le but de cet exercice est de montrer par l'absurde que π est un nombre irrationnel. Supposons donc que $\pi = \frac{p}{q}$ (n'oubliez pas cette hypothèse dans la suite de l'exercice), et posons $P_n(X) =$

$$\frac{1}{n!} X^n (p - qX)^n, \text{ et } I_n = \int_0^\pi P_n(t) \sin(t) dt.$$

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(\pi - X) = P_n(X)$.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$, et $P_n^{(n)}(\pi) \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \in \mathbb{N}$ (on pourra procéder à des intégrations par parties successives).
5. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$. En déduire que l'hypothèse initiale est absurde.

Exercice 9 (***)

Pour tout entier n , on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.
3. À l'aide d'une intégration par partie, déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n .
4. En déduire les valeurs de I_{2p} et I_{2p+1} (on les exprimera à l'aide de factorielles).
5. Déterminer la monotonie de la suite (I_n) puis prouver sa convergence.
6. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$.
7. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 10 (***)

On définit la fonction f sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$.

1. Déterminer la parité de la fonction f .
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre à préciser (mais qu'on ne demande pas de résoudre).
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2xf(x) = 1$.
4. On pose $g(x) = \frac{e^{x^2}}{2x} f'(x)$. Montrer que g est strictement décroissante sur \mathbb{R}^{+*} et qu'elle s'annule en un unique x_0 compris strictement entre 0 et 1.
5. En déduire le tableau de variations de f (on ne cherchera pas à calculer x_0).
6. Tracer une allure plausible de la courbe représentative de f .