Feuille d'exercices n°23 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

22 juin 2016

Exercice 1 (*)

1. Calculons : $AB = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$; $AD = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26}$; $BC = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$ et $BE = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$.
2. Calculons : $\overrightarrow{DA} = (-4,1,3)$ et $\overrightarrow{BE}(2,1,-3)$, donc $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BE} = -8+1-9 = -16$; $\overrightarrow{BC} = (3,-2,1)$ et $\overrightarrow{DE} = (-3,2,-1)$ donc $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DE} = -9-4-1 = -14$, $\overrightarrow{AE} = (1,1,-4)$ et $\overrightarrow{BA} = (1,0,1)$ donc $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BA} = 1-4 = -3$; $\overrightarrow{DB} = (-5,1,2)$ et $\overrightarrow{CE} = (-1,3,-4)$ donc $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CE} = 5+3-8 = 0$.
3. Pour changer, calculons : $\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{BE} = (-6,18,-6)$; $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{DE} = (0,0,0)$ (rien de surprenant, on voit bien que $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{BC}$, les deux vecteurs sont donc colinéaires) ; $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{BA} = (1,-5,-1)$ et $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{CE} = (-10,-22,-14)$.
4. Pour le premier produit mixte, on peut se contenter de calculer $\overrightarrow{CD} = (2,1,-3)$ et reprendre un calcul déjà effectué : $[\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}] = (\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{BA}).\overrightarrow{CD} = 2-5+3 = 0$. Pour le deuxième, on calcule $\overrightarrow{AB} = (-1,0,-1)$, $\overrightarrow{AC} = (2,-2,0)$ et $\overrightarrow{AD} = (4,-1,-3)$, puis $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 4 \times (-2) + 1 \times 2 - 3 \times (2) = -12$. Le parallélépipède est donc de volume 12.

Exercice 2 (**)

La méthode la plus accessible à notre niveau est un calcul brutal de coordonnées. Notons donc (dans un repère orthonormal quelconque) $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$, $\overrightarrow{v} = (x',y',z')$ et $\overrightarrow{w} = (x'',y'',z'')$, alors $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = (y'z''-z'y'', z'x''-x'z'', x'y''-y'x'')$, puis $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (yx'y''-yy'x''-zz'x''+zx'z'', zy'z''-zz'y''-xx'y''+xy'x'', xz'x''-xx'z''-yy'z''+yz'y'')$. De l'autre côté, $(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$ a pour première coordonnée $(xx''+yy''+zz'')x' - (xx'+yy'+zz')x'' = yx'y''+zx'z''-yy'x''-zz'x''$ (les termes en $xx'x''$ se simplifient) ; pour deuxième coordonnée $(xx''+yy''+zz'')y' + (xx'+yy'+zz')y'' = xy'x''+zy'z''-xx'y''-zz'y''$; et pour dernière coordonnée $(xx''+yy''+zz'')z' + (xx'+yy'+zz')z'' = xz'x''+yz'y''-xx'z''-yy'z''$. les coordonnées des deux membres coïncident, ce qui prouve la formule.

Utilisons donc la formule précédente (en faisant attention au fait que la parenthèse est à gauche et pas à droite, ça change tous les signes) : $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} + (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) \wedge \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = (\overrightarrow{w}.\overrightarrow{u})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{w}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{w} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{u} - (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u})\overrightarrow{w}$. Ces termes s'annulent deux à deux en utilisant la symétrie du produit scalaire, ce qui prouve la formule.

Exercice 3 (***)

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires (et non nuls), il ne peut pas y avoir de solution puisque $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Si $\overrightarrow{u}$ est nul et pas $\overrightarrow{v}$, là encore pas de solution. Si $\overrightarrow{v}$ est nul mais pas $\overrightarrow{u}$, tous les vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{u}$ sont solutions. Dernier cas particulier, si les deux vecteurs sont nuls, tout vecteur est solution.

Dans le cas plus intéressant où les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, $\overrightarrow{v}$ doit être orthogonal à $\overrightarrow{u}$ (sinon là encore, on n'aura pas de solution), et $\overrightarrow{v}$ doit être orthogonal à $\overrightarrow{x}$. Le vecteur $\overrightarrow{x}$ appartient donc au plan orthogonal à $\overrightarrow{v}$, dont une base est par exemple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$. Autrement dit, $\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. Par linéarité du produit vectoriel, on a donc $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$. Le premier terme étant nul, on veut avoir $\mu\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$. Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ forme une base orthogonale, donc $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$, de sens opposé, et de norme $\| \overrightarrow{u} \|^2 \times \| \overrightarrow{v} \|$. On doit donc avoir $\mu = -\dfrac{1}{\| \overrightarrow{u} \|^2}$, ce qui donne comme solution tous les vecteurs de la forme $\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{u} - \dfrac{1}{\| \overrightarrow{u} \|^2}\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

Exercice 4 (**)

1. En utilisant les propriétés de bilinéarité et d'antisymétrie du produit vectoriel,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} &= \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MC} \\ &= \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM}) \wedge \overrightarrow{MC} \\ &= \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{MC} \\ &= \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{MA} \wedge (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\end{aligned}.$$
2. En utilisant le fait que $\overrightarrow{IA} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA})$ (et relations similaires avec les autres milieux), $2(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{KC}) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) \wedge \overrightarrow{BA} + (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}) \wedge \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{BC}$ puisque le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même est nul. Après simplifications, il ne reste que $\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CM}) \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$. La formule en découle.
3. $[\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}] = ((\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI}) \wedge (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AJ})).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AK})$. Le produit vectoriel est égal à $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ}$. Le premier de ces deux produits vectoriels étant orthogonal à $\overrightarrow{MA}$, son produit scalaire avec $\overrightarrow{MA}$ est nul, donc $[\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MA}] = (\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ}).\overrightarrow{MA} = [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{MA}]$. Reste le deuxième morceau, égal à $(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ}).\overrightarrow{AK}$. Le vecteur $\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ}$ étant orthogonal à $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$, il est normal au plan (AIJ), c'est-à-dire au plan (ABC), donc son produit scalaire avec $\overrightarrow{AK}$ est nul. Quant au vecteur $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{IJ}$, comme $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ (c'est le théorème des milieux dans le triangle ABC), il est orthogonal à $\overrightarrow{BA}$, donc à $\overrightarrow{AK}$, et son produit scalaire avec $\overrightarrow{AK}$ est également nul. Finalement, on a bien $[\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}] = [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{MA}]$.

Exercice 5 (**)

1. Une façon de faire est de dire que les vecteurs $\overrightarrow{u} = (-2, 1, -1)$ et $\overrightarrow{v} = (3, 1, -2)$ forment une base du plan, et que le point $M(1, -2, 4)$ appartient au plan. On peut déterminer un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ en calculant $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (-1, -7, -5)$, le plan a donc une équation de la forme $-x - 7y - 5z + d = 0$, avec, pour que M appartienne au plan, $-1 + 14 - 20 + d = 0$, soit $d = 7$. Une équation cartésienne de $\mathcal{P}_1$ est donc $-x - 7y - 5z + 7 = 0$.

   Autre méthode, réussir à exprimer t et u dans l'équation paramétrique. Ici, en additionnant les deux dernières lignes, $y + z = 2 - u$, soit $u = 2 - y - z$, et en ajoutant le double de la deuxième équation à la dernière, $2y + z = t$. Il ne reste plus qu'à remplacer dans l'équation qu'on n'a pas encore utilisée, la première, pour obtenir $x = 1 - 2t + 3u = 1 - 4y - 2z + 6 - 3y - 3z$, soit $0 = 7 - x - 7y - 5z$. On retrouve exactement la même équation que par l'autre méthode.

2. On sait que le vecteur $\overrightarrow{n} = (2, -1, 3)$ est normal à $\mathcal{P}_2$, et que le vecteur $\overrightarrow{n'} = (1, 0, 2)$ est normal à $\mathcal{P}_3$, donc leur droite d'intersection sera dirigée par $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n'} = (-2, -1, 1)$. On obtient facilement un point de la droite en fixant par exemple $x = 0$ dans les deux équations de plan, ce qui donne rapidement $z = 2$ puis $y = 5$, donc on peut prendre le paramétrage suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & & - & 2t \\ y & = & 5 & - & t \\ z & = & 2 & + & t \end{array}\right.$.

   Autre possibilité, prendre une des variables, par exemple y, comme paramètre (on la renomme t), ce qui donne les deux équations $2x - t + 3z - 1 = 0$ et $x + 2z - 4 = 0$, on élimine ensuite x en soustrayant le double de la deuxième équation à la première : $-t - z + 7 = 0$ donne $z = 7 - t$, puis $x = 4 - 2z = -1 + 2t$. Le paramétrage obtenu est très différent du précédent, mais tout aussi valable, et évite d'avoir à trouver un point de la droite.

3. On décrit classiquement les points $M(x, y, z)$ appartenant au plan comme ceux vérifiant $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}] = 0$, soit $0 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ -3 & -1 & y-2 \\ -1 & -5 & z-3 \end{vmatrix} = 14(x-1) - (-6)(y-2) + (-4)(z-3) = 14x + 6y - 4z - 14$, d'où l'équation cartésienne, en divisant tout par 2, $7x + 3y - 2z - 7 = 0$.

4. Il suffit de remplacer les valeurs de x, y et z données par la paramétrage de D_1 dans l'équation de $\mathcal{P}_2$: $2(3-t) - (1+2t) + 3(-1+t) - 1 = 0$, soit $6 - 2t - 1 - 2t - 3 + 3t - 1 = 0$, donc $-t + 1 = 0$. On obtient $t = 1$, soit $x = 2$, $y = 3$ et $z = 0$. Le point recherché a pour coordonnées $(2, 3, 0)$.

5. Le plan $\mathcal{Q}$ contient le point de coordonnées $(3, 1, -1)$ qui est sur D_1. Une base du plan est obtenue en prenant des vecteurs directeurs de D_1 et D_2, donc un vecteur normal au plan sera le vecteur $(-1, 2, 1) \wedge (3, -2, 5) = (12, 8, -4)$. On peut diviser les coordonnées par 4, et trouver une équation de $\mathcal{Q}$ de la forme $3x + 2y - z + d = 0$. Comme $(3, 1, -1)$ appartient au plan, on doit avoir $9 + 2 + 1 + d = 0$, soit $d = -12$. Le plan $\mathcal{Q}$ a pour équation cartésienne $3x + 2y - z - 12 = 0$.

6. Injectons le paramétrage du premier plan dans les équations cartésiennes des deux autres, on obtient les équations $2(1 - 2t + 3u) - (-2 + t + u) + 3(4 - t - 2u) - 1 = 0$, soit $2 - 4t + 6u + 2 - t - u + 12 - 3t - 6u - 1 = 0$, ou encore $8t + u = 15$; et $1 - 2t + 3u + 2(4 - t - 2u) - 4 = 0$, soit $4t + u = 5$. Reste à résoudre le système de deux équations à deux inconnues pour trouver u et t. Par substitution, comme $u = 5 - 4t$, la première équation devient $4t + 5 = 15$, soit $t = \frac{5}{2}$, puis $u = -5$. En reprenant le paramétrage du premier plan, on trouve $x = 1 - 5 - 15 = -19$; $y = -2 + \frac{5}{2} - 5 = -\frac{9}{2}$ et $z = 4 - \frac{5}{2} + 10 = \frac{23}{2}$. Le point d'intersection des trois plans a donc pour coordonnées $\left(-19, -\frac{9}{2}, \frac{23}{2}\right)$.

7. Puisque $\overrightarrow{AB} = (1, -3, -1)$, la droite (AB) admet pour paramétrage $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & t \\ y & = & 2 & - & 3t \\ z & = & 3 & - & t \end{array}\right.$. On peut injecter ce paramétrage dans l'équation de $\mathcal{P}_2$: $2(1+t) - (2-3t) + 3(3-t) - 1 = 0$ donne $2 + 2t - 2 + 3t + 9 - 3t - 1 = 0$, donc $2t + 8 = 0$. Pour $t = -4$, on trouve $x = -3$, $y = 14$ et $z = 7$, qui constituent donc les coordonnées du point d'intersection cherché.

8. On connait déjà un point de la droite, le point A, il faut en trouver un vecteur directeur $\overrightarrow{u}(x, y, z)$. Le fait que la droite est parallèle à $\mathcal{P}_2$ se traduit par le fait que $\overrightarrow{u}$ doit être orthogonal au vecteur normal $\overrightarrow{n}(2, -1, 3)$ de $\mathcal{P}_2$, c'est-à-dire que $2x - y + 3z = 0$. Par ailleurs, si notre droite est sécante avec D_1, on peut trouver un point B sur la droite D_1 pour lequel $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. Or, $\overrightarrow{AB} = (2-t, 2t-1, -4+t)$ (en reprenant le paramétrage de D_1), donc l'équation

$2x-y+3z=0$ peut s'écrire $2(2-t)-(2t-1)+3(-4+t)=0$, soit $4-2t-2t+1-12+3t=0$, ce qui donne $-t-7=0$, donc $t=-7$. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{u}=(9,-15,-11)$ est directeur de la droite cherchée, qui admet donc pour paramétrage $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & = & 1 & + & 9t \\ y & = & 2 & - & 15t \\ z & = & 3 & - & 11t \end{array}\right.$.

9. Le point $M(3,1,-1)$ appartenant à D_1, les vecteurs $\overrightarrow{u}=(-1,2,1)$ (vecteur directeur de D_1), et $\overrightarrow{CM}=(3,0,1)$ forment une base du plan cherché. Il admet donc pour vecteur normal $\overrightarrow{n}=(2,4,-6)$, ou encore plus simplement $(1,2,-3)$. Son équation cartésienne est de la forme $x+2y-3z+d=0$, avec C appartenant au plan, soit $2+6+d=0$. Cela donne $d=-8$, et l'équation $x+2y-3z-8=0$.

10. Si cette droite existe, il existe un point M sur D_1 et un point M' sur D_2 pour lesquels $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires (et sont alors des vecteurs directeurs de la droite cherchée). Or, en reprenant les paramétrages des deux droites, $\overrightarrow{AM}=(2-t,2t-1,t-4)$, et $\overrightarrow{AM'}=(3u,-2-2u,5u)$. Pour que ces vecteurs soient colinéaires, on doit donc trouver un coefficient k tel que $3u=k(2-t)$, $-2-2u=k(2t-1)$ et $5u=k(t-4)$. en comparant les équations extrêmes (que je multiplie par 5 et 3 pour plus de simplicité), on a $10k-5kt=3kt-12k$, soit $22k=8kt$, donc $t=\dfrac{11}{4}$. On réécrit alors les trois équations : $3u=-\dfrac{3}{4}k$; $-2-2u=\dfrac{9}{2}k$ et $5u=-\dfrac{5}{4}k$. Les deux équations extrêmes donnent $u=-\dfrac{1}{4}k$, celle du milieu devient alors $-2+\dfrac{1}{2}k=\dfrac{9}{2}k$, soit $k=-\dfrac{1}{2}$. Il ne reste plus qu'à en déduire $u=\dfrac{1}{8}$. Le système admet donc une solution (unique), et la droite recherchée admet par exemple pour vecteur directeur $8\overrightarrow{AM'}=(3,-9,5)$, d'où le paramétrage $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & = & 1 & + & 3s \\ y & = & 2 & - & 9s \\ z & = & 3 & + & 5s \end{array}\right.$

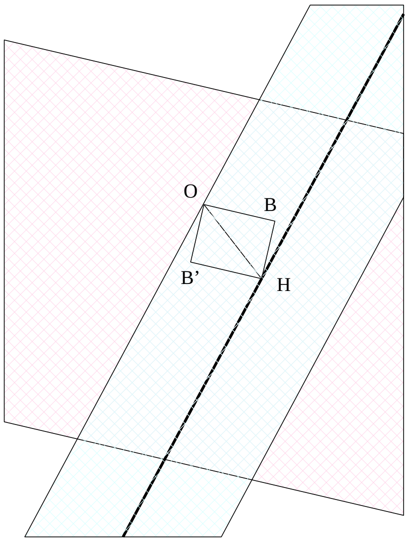
Exercice 6 (**)

1. Cette distance vaut simplement $\sqrt{(4+2t)^2+(3+t)^2+(1+t)^2}$ $=\sqrt{16+16t+4t^2+9+6t+t^2+1+2t+t^2}=\sqrt{6t^2+24t+26}$. Cette distance est minimale lorsque $6t^2+24t+26$ (qui est toujours positif puisque somme de trois carrés) atteint son minimum, c'est-à-dire pour $t=-\dfrac{24}{2\times 6}=-2$. Le point correspond de la droite vérifie $x=0$, $y=1$ et $z=-1$, donc $H(0,1,-1)$. On ne revient évidemment pas à la grosse racine carrée pour calculer la distance : $d(O,D)=OH=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

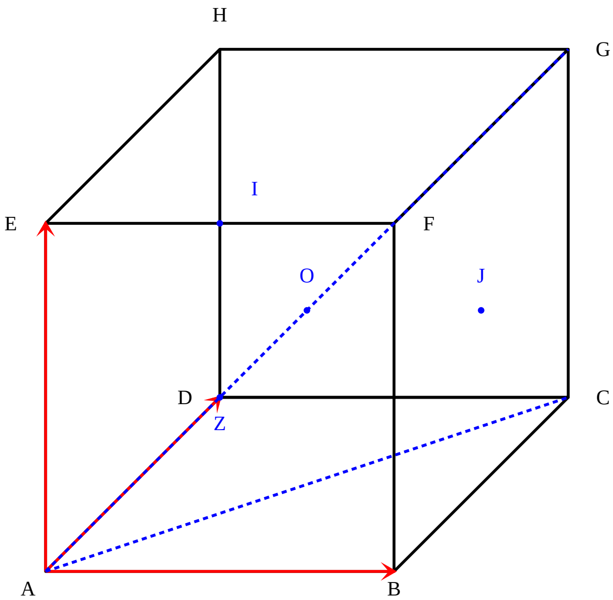
2. Avec le paramétrage donné pour D, $x-2z=4+2t-2(1+t)=2$. Le plan $\mathcal{P}$ ayant pour vecteur normal $(1,0,-2)$, un vecteur normal $\overrightarrow{n}(\alpha,\beta,\gamma)$ du plan $\mathcal{Q}$ devra vérifier $\alpha-2\gamma=0$ pour être orthogonal à celui de $\mathcal{P}$. Il devra également être orthogonal à un vecteur directeur de D, ce qui implique $2\alpha+\beta+\gamma=0$. On a donc $\alpha=2\gamma$ et $\beta=-5\gamma$, on peut choisir $\overrightarrow{n}=(2,-5,1)$. Le plan $\mathcal{Q}$ a donc une équation de la forme $2x-5y+z+d=0$, et il passe par le point $A(4,3,1)$ (puisqu'il contient la droite D), donc $8-15+1+d=0$, soit $d=6$. On obtient finalement l'équation $2x-5y+z+6=0$

3. Notons B et B' les projetés orthogonaux respectifs du point O sur les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. En notant (x,y,z) les coordonnées du point B, le vecteur $\overrightarrow{OB}(x,y,z)$ doit être normal au plan $\mathcal{P}$, donc colinéaire à $(1,0,-2)$. On en déduit immédiatement que $y=0$ et $z=-2x$. Par ailleurs, B appartenant au plan $\mathcal{P}$, on a également $x-2z=2$, soit $5x=2$, donc $x=\dfrac{2}{5}$. On obtient donc $B\left(\dfrac{2}{5},0,-\dfrac{4}{5}\right)$, puis $d(O,\mathcal{P})=OB=\sqrt{\dfrac{4}{25}+\dfrac{16}{25}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. On fait de même pour le point $B'(x',y',z')$. Cette fois-ci, $\overrightarrow{OB'}$ doit être colinéaire à $(2,-5,1)$, ce qui donne $x'=2z'$ et $y'=-5z'$. Comme de plus $2x'-5y'+z'+6=0$, on obtient $4z'+25z'+z'+6=0$, soit $z'=-\dfrac{1}{5}$,

puis $B'\left(\frac{2}{5}, -1, \frac{1}{5}\right)$, et enfin $d(O, \mathcal{Q}) = OB' = \sqrt{\frac{4}{25} + 1 + \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$. Or, le quadrilatère $OBB''B'$ est un rectangle car les deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ se coupent en D et sont perpendiculaires. Par application du théorème de Pythagore, $d(O, D) = \sqrt{d(O, \mathcal{P})^2 + d(O, \mathcal{Q})^2} = \sqrt{\frac{4}{5} + \frac{6}{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$ (ouf, ça marche, mais sans la formule de calcul de distance à un plan à partir de l'équation cartésienne, c'est un peu lourd).



Exercice 7 (**)



1. On a $C(1, 1, 0)$, $F(0, 1, 1)$, $G(1, 1, 1)$ et $H(1, 0, 1)$. Si on tient absolument à justifier, on utilise des égalités vectorielles du type $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$.

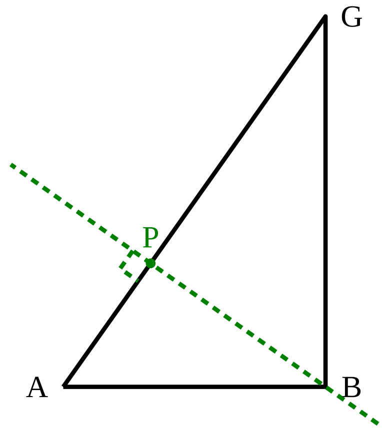
2. Méthode rustique : on applique le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC pour obtenir $AC = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, puis dans le triangle rectangle ACG pour obtenir $AG = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

   Méthode sophistiquée : $AC = \parallel \overrightarrow{AC} \parallel = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$, et $AH = \parallel \overrightarrow{AG} \parallel = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$.

3. Par exemple pour la diagonale (AC) : A et C sont évidemment à distance 0, E et G à distance 1 puisque leurs projetés respectifs sur la droite sont A et C ; B et D sont à distance $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ car les triangles ABK et ADK, où K est le milieu de $[AC]$, sont rectangles isocèles. Enfin, les triangles KBF et KDH étant rectangles, un coup de Pythagore permet d'obtenir $KF = KH = \sqrt{1^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, qui sont les distances des points F et H à la droite (AC).

   Pour une méthode plus sophistiquée, on utilise la distance d'un point à une droite. Ici, le vecteur directeur $\overrightarrow{AC}$ a pour norme $\sqrt{2}$, et on a par exemple $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (0,0,1)$, donc $d(B,(AC)) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. De même, $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AC} = (-1,1,0)$, donc $d(E,(AC)) = \dfrac{\sqrt{(-1)^2+1^2}}{\sqrt{2}} = 1$. Enfin, $\overrightarrow{AF}\overrightarrow{AC} = (-1,1,-1)$, donc $d(F,(AC)) = \dfrac{\sqrt{(-1)^2+1^1+(-1)^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

   Pour la grande diagonale, méthode rustique : A et G sont à distance nulle, pour B par exemple on se place dans le triangle rectangle ABG et on cherche la hauteur issue de B dans ce triangle, notons P le projeté orthogonal de B sur (AG).



   Le triangle a pour aire $\dfrac{1}{2}AG \times BP = BP\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, mais aussi $\dfrac{1}{2}AB \times BG = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $BP = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Les distances des cinq autres sommets du cube à la droite (AG) sont aussi égales à $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (on peut dessiner des situations semblables à celle qu'on vient d'étudier pour chacun d'eux).

   Et pour un calcul plus savant, $d(B,(AG)) = \dfrac{\parallel \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AG} \parallel}{\parallel \overrightarrow{AG} \parallel}$, avec $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AG} = (0,-1,1)$, donc $d(B,(AG)) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

4. Le triangle AGH est rectangle en H, son aire vaut $\frac{1}{2}AH \times HG = \frac{\sqrt{2}}{2}$; le triangle AFH est équilatéral de côté $\sqrt{2}$, donc de hauteur $\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, donc son aire vaut $\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Méthode sophistiquée : $\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{AH} = (1, 0, -1)$, donc l'aire de AGH vaut $\frac{1}{2}\sqrt{1^2+(-1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; et $\overrightarrow{AF}\wedge\overrightarrow{AH} = (1, 1, -1)$ donc l'aire de AFH vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
5. Faisons-le pour (AC) : l'angle avec les faces $(ABCD)$ et $(EFGH)$ est évidemment nul, l'angle avec chacune des quatre autres faces vaut $\frac{\pi}{4}$ car les triangles ABC et ACD sont isocèles rectangles. L'angle formé par la droite (AG) avec chacune des six faces est identique, par exemple avec la face $(ABCD)$ il s'agit de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}})$ (car C est le projeté orthogonal de G sur $(ABCS)$), qui vaut $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, ou si on préfère $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ce n'est pas un angle remarquable).

   Il n'y a pas de méthode sophistiquée très intéressante ici, on peut toujours déterminer l'angle avec un produit scalaire (ou vectoriel) mais il faut déjà connaitre le projeté de G sur $(ABCD)$.
6. Le tétraèdre $ABFG$ a par exemple pour hauteur $AB = 1$ et pour base le triangle BFG d'aire $\frac{1}{2}$, donc il a pour volume $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$; $OFGH$ a pour hauteur $d(O, (EFGH)) = \frac{1}{2}$ et pour base le triangle FGH d'aire $\frac{1}{2}$, son volume vaut $\frac{1}{12}$; enfin, pour $AIJO$, on peut remarquer que le plan (IJO) est en fait le plan $(CDEF)$, donc la hauteur issue de A vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (le projeté prthogonal de A sur $(CDEF)$ est le centre de la face $(ADEH)$). La base est ici le triangle OIJ, qui est rectangle en O, avec $OJ = \frac{1}{2}$ et $OI = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc elle a pour aire $\frac{\sqrt{2}}{8}$. Finalement, le tétraèdre $AIJO$ a pour volume $\frac{1}{24}$.

   La méthode sophistiquée consiste à calculer des produits mixtes pour obtenir les volumes de parallélépipèdes, et à les diviser par 6 pour retrouver le volume du tétraèdre. Pour $ABFG$, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 0 - 1\times 1 + 1\times 0 = -1$, donc $ABFG$ a pour volume $\frac{1}{6}$. Pour $OFGH$, le point O ayant pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $[\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH}] = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, donc $OFGH$ a pour volume $\frac{1}{12}$. Enfin, I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$ et $J\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, donc $[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AO}] = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, donc $AOIJ$ a pour volume $\frac{1}{24}$.
7. Le plan en question a pour vecteur normal $\overrightarrow{AG}(1, 1, 1)$, donc admet une équation cartésienne du type $x + y + z + d = 0$. Comme O appartient au plan, $d = -\frac{3}{2}$, donc l'équation peut être écrite $2x + 2y + 2z - 3 = 0$. Il est alors facile de constater que les points $M_1\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$;

$M_2\left(1,0,\dfrac{1}{2}\right)$; $M_3\left(\dfrac{1}{2},0,1\right)$; $M_4\left(\dfrac{1}{2},1,0\right)$; $M_5\left(0,\dfrac{1}{2},1\right)$ et $M_6\left(0,1,\dfrac{1}{2}\right)$ appartiennent au plan. Or, ces six points sont des milieux d'arêtes du cube (respectivement de $[BC]$, $[BF]$, $[EF]$, $[DC]$, $[EH]$ et $[DH]$, et on vérifie sans difficulté que les six triangles OM_1M_2, OM_2M_3, OM_3M_5, OM_5M_6, OM_6M_4 et OM_4M_1 sont équilatéraux. Par exemple pour OM_1M_2, on a $OM_1 = \sqrt{\dfrac{1}{4}+0+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $OM_2 = \sqrt{\dfrac{1}{4}+0+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $M_1M_2 = \sqrt{0+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. L'hexagone $M_1M_2M_3M_5M_6M_4$ est donc régulier et centré en O, et il constitue l'intersection de notre plan avec le cube.

Exercice 8 (** à ***)

Une façon de faire, pour exploiter les données de notre cours, est de trouver les coordonnées de quatre points formant un tétraèdre régulier dans un repère orthonormal direct. On peut toujours prendre $A(0,0,0)$, et $B(1,0,0)$. Le point C peut être choisi dans le plan $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, pour que ABC soit équilatéral on choisira $C\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$. Reste à trouver un point $D(x,y,z)$ à distance 1 des points A, B et C. Il devra certainement vérifier $x = \dfrac{1}{2}$ (c'est une condition nécessaire pour avoir $DA = DB$, puis $AD^2 = \dfrac{1}{4}+y^2+z^2 = 1$, soit $y^2+z^2 = \dfrac{3}{4}$; et $CD^2 = \left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + z^2 = 1$, soit $y^2-\sqrt{3}y+\dfrac{3}{4}+z^2 = 1$. Comme $y^2+z^2 = \dfrac{3}{4}$, on trouve $-\sqrt{3}y = -\dfrac{1}{2}$, soit $y = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. On a alors $y^2 = \dfrac{1}{12}$, donc il faut $z^2 = \dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{12} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$, donc par exemple $z = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Le point D a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

- Le plan (ABC) étant confondu avec le plan $z=0$, la hauteur du tétraèdre est simplement la cote du point D, donc $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.
- La base ABC a pour aire $\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, donc le volume du tétraèdre vaut $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$.
- Il s'agit de calculer par exemple la distance entre les droites (AB) et (CD). Il est assez intuitif géométriquement que la droite perpendiculaire à (AB) et (CD) est celle passant par les milieux I et J des segments $[AB]$ et $[CD]$. Vérifions-le quand même : I a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)$, et J a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$, donc $\overrightarrow{IJ} = \left(0,\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$. On a bien $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB} = 0$, et $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{CD} = 0+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\dfrac{-2}{2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\times\sqrt{\dfrac{2}{3}} = -\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3} = 0$. La distance entre nos deux droites est donc simplement la distance $IJ = \sqrt{0+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
- En notant $I\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)$ le milieu de $[AB]$, l'angle entre les faces (ABC) et (ABD) correspond à l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$ (vérifiez si vous ne me croyez pas que ces deux vecteurs sont orthogonaux à (AB), qui est évidemment la droite d'intersection des deux faces). Ces deux vecteurs ont pour coordonnées $\overrightarrow{IC} = \left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ et $\overrightarrow{ID} = \left(0,\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$. Ces deux

vecteurs ont pour norme $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ce sont des hauteurs de triangles équilatéraux de côté 1, mais on peut le retrouver par le calcul), et pour produit scalaire $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$. On en déduit que $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos(\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}}) = \frac{1}{4}$, donc $\cos(\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}}) = \frac{1}{3}$. Les faces forment entre elles un angle (non remarquable) de $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$.

Exercice 9 (*)

Notons $(\mathcal{S}_1)$, $(\mathcal{S}_2)$ et $(\mathcal{S}_3)$ les trois sphères.

- $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 4$, donc $\mathcal{S}_1$ a pour centre $A_1(1,1,1)$ et pour rayon $R_1 = 2$.
- $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z + 12 = x^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 - 1$, donc $\mathcal{S}_2$ a pour centre $A_2(0,2,-3)$ et pour rayon $R_2 = 1$.
- $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z + \frac{3}{2} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (z-1)^2 - 1$, donc la sphère $\mathcal{S}_3$ a pour centre $A_3\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)$ et pour rayon $R_3 = 1$.

Pour les intersections avec $\mathcal{P}$, il va falloir calculer les distances de A_1, A_2 et A_3 au plan $\mathcal{P}$ et donc leurs projetés orthogonaux B_1, B_2 et B_3 sur ce plan. Notons donc $B_1(x,y,z)$, le vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}(x-1, y-1, z-1)$ doit être normal au plan $\mathcal{P}$, donc colinéaire à $(1,1,1)$. Autrement dit, on doit avoir $x-1 = y-1 = z-1$, soit $x = y = z$. Comme de plus le point B' appartient à $\mathcal{P}$, on doit vérifier la dernière condition $x + y + z - 3 = 0$, ce qui donne immédiatement $B_1(1,1,1)$. Ah ben oui, on aurait pu se rendre compte que le point A_1 lui-même appartenait manifestement au plan. L'intersection recherchée est donc un cercle de centre A_1 et de rayon 2 (et on est incapable de le décrire mieux que ça). Pour la deuxième sphère, notons de même $B_2(x,y,z)$, et calculons $\overrightarrow{A_2B_2}(x, y-2, z+3)$. Cette fois, la colinéarité avec un vecteur normal à $\mathcal{P}$ donne $x = y-2 = z+3$, ou encore $y = x+2$ et $z = x-3$. En reportant dans l'équation de plan, on trouve $3x - 1 - 3 = 0$, soit $x = \frac{4}{3}$ puis $B_2\left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ et $\overrightarrow{A_2B_2} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$. On peut désormais calculer $d(A_2, \mathcal{P}) = A_2B_2 = \sqrt{3 \times \frac{16}{9}} = \frac{4}{\sqrt{3}} > 1$, donc l'intersection est vide. Dernier projeté, $B_3(x,y,z)$ tel que $\overrightarrow{(}A_3B_3) = \left(x - \frac{1}{2}, y + \frac{3}{2}, z - 1\right)$. La condition de colinéarité désormais habituelle donne $x - \frac{1}{2} = y + \frac{3}{2} = z - 1$, soit $x = z - \frac{1}{2}$ et $y = z - \frac{5}{2}$. On reporte dans l'équation du plan $\mathcal{P}$ pour obtenir $3z - 6 = 0$ soit $z = 2$ puis $x = \frac{3}{2}$ et $y = -\frac{1}{2}$. Autrement dit, $B_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)$, et la distance du centre de la sphère au plan est donc égal à $A_3B_3 = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, ce qui est encore une fois supérieur au rayon de la sphère, il n'y a donc pas non plus d'intersection.

Passons à l'intersection éventuelle des deux premières sphères : $A_1A_2 = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} > R_1 + R_2$, donc les sphères n'ont pas d'intersection. Pour les sphères $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_3$, on calcule $A_1A_3 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4} + 0} = \frac{\sqrt{26}}{2}$. On constate que $1 = |R_1 - R_3| < A_1A_3 < R_1 + R_3 = 3$, il y aura donc un cercle d'intersection entre les deux sphères (qu'on ne cherchera pas à décrire plus, on sait qu'on n'y arrivera pas. Enfin, pour les deux dernières sphères, $A_2A_3 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{4} + 16} = \frac{\sqrt{66}}{2}$, ce qui est très nettement plus gros que $R_2 + R_3$. Il n'y a donc pas d'intersection entre $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$.

Exercice 10 (**)

Pour déterminer les coordonnées des quatres sommets, il faut résoudre les quatre systèmes de trois équations à trois inconnus obtenus en gardant trois des quatre équations de plan. Allons-y :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 2z & = & -2 \\ 2x & & & & & = & 6 \end{array}$$

(on a soustrait les deux premières équations et additionné les deux dernières), d'où un premier sommet $A(3, -2, -1)$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ -x & + & y & + & z & = & 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 2z & = & -2 \\ & & 2y & & & = & 8 \end{array}$$

(mêmes opérations que ci-dessus), d'où un deuxième sommet $B(-3, 4, -1)$.

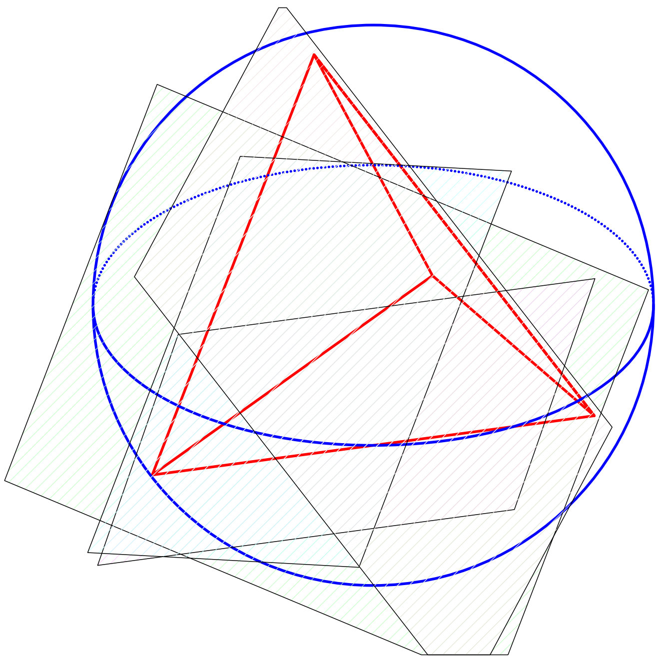
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 4 \\ -x & + & y & + & z & = & 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 2z & = & 10 \\ & & 2y & & & = & -4 \end{array}$$

(on a additionné les deux deuxières équations et soustrait les deux premières), d'où un troisième sommet $C(-3, -2, 5)$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 4 \\ -x & + & y & + & z & = & 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & & & & & = & 6 \\ & & & & 2z & = & 10 \end{array}$$

(on a additionné les deux premières et les deux dernières équations), d'où un dernier sommet $D(3, 4, 5)$.

Le centre $O(x, y, z)$ de la sphère circonscrite est situé à égale distance des quatre sommets. Pour avoir $OA^2 = OB^2$, on doit avoir $(x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2 = (x+3)^2+(y-4)^2+(z+1)^2$, soit en simplifiant les carrés qui apparaissent des deux côtés $-6x+4y+2z+14 = 6x-8y+2z+26$, donc $-12x+12y-12 = 0$, soit $y = x+1$; de même, la condition $OA^2 = OC^2$ donne $-6x+4y+2z+14 = 6x+4y-10z+38$, soit $-12x+12z-24 = 0$, donc $z = x+2$. Enfin, la condition $OA^2 = OD^2$ (les autres seront automatiquement vérifiées ensuite) donne $-6x+4y+2z+14 = -6x-8y-10z+50$, soit $12y+12z-36 = 0$, donc $y = 3-z$. En reprenant les deux autres conditions, on a donc $x+1 = 3-x-2$, soit $x = 0$, puis $y = 1$ et $z = 2$. Le centre de la sphère circonscrite est donc le point $O(0, 1, 2)$, et le rayon vaut par exemple $OA = \sqrt{9+9+9} = 3\sqrt{3}$.



Exercice 11 (***)

1. Ca ressemble en effet beaucoup à une sphère : $(x-(m+1))^2-(m^2+2m+1)+(y+(m-1))^2-(m^2-2m+1)+(z-2m)^2-4m^2-6m-4=0$, soit $(x-(m+1))^2+(y-(m-1))^2+(z-2m)^2=6m^2+6m+6=6(m^2+m+1)$. Le trinôme m^2+m+1 ayant un discriminant négatif, il est toujours positif, donc la sphère n'est jamais vide. On est en présence d'une sphère de centre $O_m(m+1,1-m,2m)$ et de rayon $R_n=\sqrt{6(m^2+m+1)}$.

2. Le système $\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 1 & + & m \\ y & = & 1 & - & m \\ z & = & & & 2m \end{array}\right.$ est un système d'équations paramétriques d'une droite, passant par le point $A(1,1,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1,-1,2)$.

3. Pour le centre, c'est assez manifestement impossible (si $2m=2m'$ par exemple, on a automatiquement $m=m'$). Pour le rayon, il faut avoir $m^2+m+1=m'^2+m'+1$, soit $m^2-m'^2+m-m'=0$, donc $(m+m')(m-m')+m-m'=0$ ou encore $(m-m')(m+m'+1)$. Les sphères ont donc même rayon (outre le cas évident $m=m'$) si $m'=-1-m$. À part pour $m=-1$, il existe donc, pour toute valeur de m, une autre valeur du paramètre pour laquelle le rayon sera le même.

4. On peut écrire l'équation de nos sphères un peu différemment : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4+2m(-x+y-2z-3)=0$. Pour que cette égalité soit vérifiée, à (x,y,z) fixés, indépendamment de la valeur de m, on doit avoir $-x+y-2z-3=0$, qui est l'équation d'un plan $\mathcal{P}$, et $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4=0$, soit $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=6$, équation de la sphère de centre A (le même que ci-dessus) et de rayon $\sqrt{6}$. Reste à déterminer le projeté orthogonal $B(x,y,z)$ du point A sur le plan $\mathcal{P}$, pour vérifier s'il y a une intersection avec notre sphère. On calcule $\overrightarrow{AB}(x-1,y-1,z)$, qui doit être normal à $\mathcal{P}$, donc colinéaire à $(1,-1,2)$. Cela donne les deux conditions $y-1=1-x$, soit $y=2-x$, et $z=2x-2$. En reportant dans l'équation du plan (auquel appartient le point B), on trouve $-x+2-x-4x+4-3=0$, soit $x=\dfrac{2}{3}$, puis $B\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$, et $\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$. On peut maintenant en déduire $d(A,\mathcal{P})=\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{9}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}<\sqrt{6}$, l'intersection recherchée est donc un cercle $\mathcal{C}$ qu'on ne cherchera pas à expliciter plus.

5. Pour qu'aucune sphère ne passe par un point, il faut que l'équation $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4+2m(-x+y-2z-3)=0$ ne soit vérifiée par aucune valeur de m, ce qui sera le cas si $-x+y-2z-3=0$, autrement dit si notre point appartient à $\mathcal{P}$, mais $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4\neq 0$. L'ensemble recherché est donc $\mathcal{P}\backslash\mathcal{C}$.

6. Le plan $(\mathcal{P}_m)$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n}_m=\overrightarrow{OO_m}=(m+1,1-m,2m)$, donc a une équation de la forme $(m+1)x+(1-m)y+2mz+d=0$. Comme il passe de plus par le point O_m, on a $(m+1)^2+(1-m)^2+(2m)^2+d=0$, soit $m^2+2m+1+1-2m+m^2+4m^2+d=0$, donc $d=-6m^2-2$. D'où l'équation $(m+1)x+(1-m)y+2mz-6m^2-2=0$.

7. Il faudrait pour cela que le trinome en la variable m qu'on vient d'obtenir s'annule quelle que soit la valeur de m. Comme son coefficient dominant vaut -6, ce trinôme n'est pas nul, c'est donc impossible. Il n'y a aucun point commun à tous les plans $\mathcal{P}_m$.

8. Le point O_m appartenant par définition au plan $\mathcal{P}_m$, cette intersection sera un cercle de centre O_m et de rayon R_m.

9. Dans ce cas, les vecteurs $\overrightarrow{OO_m}$ et $\overrightarrow{OO_{m'}}$ ne peuvent pas être colinéaires, car leur produit vectoriel vaut $(2(1-m)m'-2(1-m')m; 2m(m'+1)-2m'(m+1); (m+1)(1-m')-(m'+1)(1-m))=(2(m'-m),2(m-m'),2(m-m'))$, qui est non nul et colinéaire à $(-1,1,1)$. Les deux plans se coupent donc suivant une droite dirigée par $(-1,1,1)$, reste à trouver un point sur cette droite. En choisissant par exemple $x=0$, on a les deux équations $(1-m)y+2mz-6m^2-2=0$ et $(1-m')y+2m'z-6m'^2-2=0$. En soustrayant les deux

équations, $(m'-m)y+2(m-m')z = 6(m^2-m'^2)$, donc $-y+2z = 6(m+m')$. On injecte dans la première équation : $y+6m(m+m')-6m^2-2=0$, donc $y = 2-6mm'$. On en déduit $z = 3(m+m')+1-3mm'$. On peut donc écrire le système paramétrique suivant :
$$\begin{cases} x = & & - & t \\ y = & 2-6mm' & + & t \\ z = & 3(m+m')+1-3mm' & + & t \end{cases}$$

10. Il passe au moins un plan par le point de coordonnées (x,y,z) si le trinôme $(m+1)x+(1-m)y+2mz-6m^2-2=0$ admet une solution. On peut l'écrire $6m^2+m(-x+y-2z)+2-x-y$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = (-x+y-2z)^2-24(2-x-y)$, le point est donc convenable si $\Delta \geqslant 0$, soit $x^2+y^2+4z^2-2xy+4xz-4yz+24x+24y-48 \geqslant 0$ (ce qui doit être une zone située en dehors d'un ellipsoïde). Ce n'est certainement pas le cas pour l'origine du repère. D'ailleurs, on obtient dans ce cas l'équation $-6m^2-2=0$, qui n'a effectivement pas de solution réelle.

Exercice 12 (***)

1. Puisque $\overrightarrow{AB} = (2,1,-1)$ et $\overrightarrow{AC} = (1,1,1)$, on calcule $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (2,-3,1)$. Ce produit vectoriel n'étant pas nul, les trois points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Un point $M(x,y,z)$ appartient au plan (ABC) si $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}] = 0$, soit $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM} = 0$. En reprenant le calcul précédent, on obtient l'équation $2x-3y+z=0$. Un système d'équations paramétriques est obtenu en prenant comme point du plan A et comme base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, ce qui donne $\begin{cases} x = 2t + u \\ y = t + u \\ z = -t + u \end{cases}$, où $(t,u) \in \mathbb{R}^2$.
3. La sphère tangente au plan est celle dont le rayon est égal à la distance de son centre au plan. Ici, en reprenant l'équation cartésienne de (ABC), $d(M_k,(ABC)) = \dfrac{|k|}{\sqrt{4+9+1}} = \dfrac{|k|}{\sqrt{14}}$. La sphère a donc pour rayon $\dfrac{|k|}{\sqrt{14}}$. Il existe deux valeurs de k pour lesquelles ce rayon est égale à 2, $k = 2\sqrt{14}$, et $k = -2\sqrt{14}$.
4. Notons (x,y,z) les coordonnées du point D. On peut alors calculer $\overrightarrow{AD} = (x,y,z)$; $\overrightarrow{BD} = (x-2, y-1, z+1)$; $\overrightarrow{CD} = (x-1,y-1,z-1)$ et $\overrightarrow{BC} = (-1,0,2)$. Les trois conditions données s'écrivent respectivement $-x+2z=0$; $x+y+z-2=0$ et $2x+y-z-2=0$. Ce système se résout très rapidement : $x = 2z$, puis en injectant dans la deuxième équation $y = 2-x-z = 2-3z$, et la troisième équation devient $4z+2-3z-z-2=0$, qui est toujours vérifiée. Les points recherchés sont donc de la forme $(2z, 2-3z, z)$, pour $z \in \mathbb{R}$. On reconnait le paramétrage d'une droite passant par le point de coordonnées $(0,2,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (2,-3,1)$.
5. Si on injecte le paramétrage précédent dans l'équation cartésienne de (ABC), on trouve $4z-6+9z+z=0$, soit $z = \dfrac{6}{14} = \dfrac{3}{7}$. Il existe donc une unique solution dans (ABC), de coordonnées $\left(\dfrac{6}{7}, \dfrac{5}{7}, \dfrac{3}{7}\right)$. Ce point est l'orthocentre H du triangle ABC, puisque les trois conditions de la question 4 associée à l'appartenance du point au plan (ABC) signifient qu'il appartient aux trois hateurs du triangle.
6. C'est du calcul facile : $AD = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$; $BD = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $CD = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. Même pas besoin de se fatiguer plus pour le projeté orthogonal, il s'agit du point H déterminé à la question précédente (puisque le point D appartient à la droite obtenue à la question 4). On en déduit que $d(D,(ABC)) = DH = \left\|\left(-\dfrac{8}{7}, \dfrac{12}{7}, -\dfrac{4}{7}\right)\right\| = \sqrt{\dfrac{64}{49} + \dfrac{144}{49} + \dfrac{16}{49}} = \dfrac{4\sqrt{14}}{7} = 4\sqrt{\dfrac{2}{7}}$.

7. On connait la hauteur du tétraèdre grâce à la question précédente. L'aire de se base vaut $\frac{1}{2} \parallel \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \parallel = \frac{\sqrt{14}}{2}$, donc le volume du tétraèdre est $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{14}}{2} \times 4\sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.
8. Un plan perpendiculaire simultanément à (ABC) et (BCD) admet pour vecteur normal $\overrightarrow{BC} = (1, 0, -2)$ puisque la droite (BC) est commune aux deux plans. Ainsi, son équation cartésienne est de la forme $x - 2z + d = 0$. Si on veut qu'il soit tangent à $\mathcal{S}$, la distance du centre de $\mathcal{S}$ au plan doit être égale à 2 (rayon de la sphère), calculons donc cette distance. Notons $Z(x, y, z)$ le projeté orthogonal de notre centre sur le plan. On constate que $\overrightarrow{M_{2\sqrt{14}}Z} = (x, y, z - 2\sqrt{14})$ est colinéaire à $(1, 0, -2)$ si $y = 0$ et $z - 2\sqrt{14} = -2x$, soit $z = 2(\sqrt{14} - x)$. Le point Z appartient donc à notre plan si $x + 4x - 4\sqrt{14} + d = 0$, soit $x = \frac{4}{5}\sqrt{14} - \frac{d}{5}$. On a alors $\overrightarrow{M_{2\sqrt{14}}Z} = \left(\frac{4\sqrt{14} - d}{5}, 0, \frac{2d - 8\sqrt{14}}{5}\right)$, et la distance de $M_{2\sqrt{14}}$ au plan vaut donc $\frac{|d - 4\sqrt{14}|}{5}$. La condition de tangence $|d - 4\sqrt{14}| = 2\sqrt{5}$ donne en fait deux valeurs possibles pour d, $d_1 = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{14}$, et $d_2 = 4\sqrt{14} - 2\sqrt{5}$. Pour la valeur d_1 par exemple, l'équation du plan est $x - 2z + 4\sqrt{14} - 2\sqrt{5} = 0$.
9. La hauteur issue de A devant être perpendiculaire au plan (BCD), elle est donc dirigée par un vecteur normal à (BCD). Choisissons par exemple $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (-1, 0, 2) \wedge (1, -2, 0) = (4, 2, 2)$. Tant qu'à faire, on peut diviser tout par 2, et comme la droite passe par le point A, on obtient le paramétrage $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2t \\ y & = & t \\ z & = & t \end{array}\right.$. Pour la hauteur issue de D, c'est encore plus rapide puisqu'on a déjà un vecteur normal calculé à la première question, on obtient le paramétrage $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & + & 2u \\ y & = & -1 & - & 3u \\ z & = & 1 & + & u \end{array}\right.$.

   À l'aide des paramétrages, on obtient pour l'intersection le système $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2t & = & 2 & + & 2u \\ t & = & -1 & - & 3u \\ t & = & 1 & + & u \end{array}\right.$.
   Les deux équations extrêmes sont équivalents, et les deux dernières équations impliquent $-1 - 3u = 1 + u$, soit $u = -\frac{1}{2}$, puis $t = \frac{1}{2}$. Le point d'intersection recherché a donc pour coordonnées $H\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Pour vérifier que H est sur la hauteur issue de B, il faut que $\overrightarrow{BH}$ soit orthogonal au plan (ACD), donc à $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Comme $\overrightarrow{BH} = \left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, on calcule $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = -1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$; et $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AD} = -2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 0$. Le point H est bien sur la troisième hauteur (et accessoirement sur la quatrième, celle issue de C, mais ce n'était pas demandé).
10. La perpendiculaire commune aux deux droites sera dirigée par $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{BC} = (2, -1, -1) \wedge (-1, 0, 2) = (-2, -5, -1)$. On prendra plutôt $\overrightarrow{u} = (2, 5, 1)$ comme vecteur directeur. Notons $\mathcal{P}_1$ le plan contenant la droite (AD) et la perpendiculaire commune, il admet pour base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AD})$, donc pour vecteur normal $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AD} = (2, 5, 1) \wedge (2, -1, 1) = (6, 0, -12)$. Quitte à tout diviser par 6, on obtient comme équation du plan $\mathcal{P}_1 : x - 2z = 0$ (puisque le plan passe par A). De même, on note $\mathcal{P}_2$ le plan contenant (BC) et la perpendiculaire commune, qui a donc pour vecteur normal $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{BC} = (2, 5, 1) \wedge (-1, 0, 2) = (10, -5, 5)$. Une équation du plan $\mathcal{P}_2$ est donc $2x - y + z + d = 0$, avec $2 - 1 + 1 + d = 0$ pour que C appartienne au plan, d'où l'équation $2x - y + z - 2 = 0$. Finalement, un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune est $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & - & 2z & & & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & - & 2 & = & 0 \end{array}\right.$. Les coordonnées du

point H vérifient bien les deux équations : $1-1=0$ et $2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-2=0$, il appartient donc à cette perpendiculaire commune. Si on n'avait que ça à faire, on vérifierait de même qu'il appartient aux autres perpendiculaires communes d'arêtes non coplanaires du tétraèdre $ABCD$. Une petite figure pour conclure, avec les deux hauteurs en bleu, et la perpendiculaire commune en vert.