

# Feuille d'exercices n°21 : Géométrie plane

PTSI B Lycée Eiffel

7 juin 2016

## Exercice 1 (\*)

On se place dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et on considère le point  $\Omega(1; -1)$  ainsi que les vecteurs  $\vec{u}$  de coordonnées  $(1; 2)$  et  $\vec{v}$  de coordonnées  $(-2; 3)$ .

1. Montrer que  $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$  est un repère. Est-il orthonormal ?
2. Soient  $A(5, 6)$  et  $\vec{z}$  le vecteur de coordonnées  $(-3; -3)$  dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Calculer leurs coordonnées dans  $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ .
3. Déterminer une équation dans  $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$  du cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

## Exercice 2 (\*\*\*)

Soit  $ABC$  un triangle, on note  $a = BC$ ,  $b = AC$  et  $c = AB$ , ainsi que  $p$  le demi-périmètre du triangle :  $p = \frac{a + b + c}{2}$ .

1. Démontrer la relation d'Al-Kashi  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{BAC})$ .
2. En déduire la valeur de  $\sin(\widehat{BAC})$  en fonction de  $a$ .
3. Prouver la relation des sinus  $\frac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{b}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{c}{\sin(\widehat{ACB})}$ .
4. Démontrer la formule de Héron  $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , où  $\mathcal{A}$  désigne l'aire du triangle  $ABC$ .

## Exercice 3 (\*)

Dans un parallélogramme  $ABCD$ , prouver la relation  $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$ .

## Exercice 4 (\*)

Démontrer à l'aide d'un calcul de produit scalaire que les hauteurs d'un triangle non aplati sont concourantes.

## Exercice 5 (\*\*\*)

Soit  $ABC$  un triangle vérifiant  $AB = 1$ . On se place dans un repère orthonormal dont l'origine est le point  $A$  et le premier vecteur  $\vec{AB}$ . On note  $(x, y)$  les coordonnées du point  $C$  dans ce repère.

1. Calculer les coordonnées de l'isobarycentre  $G$  du triangle  $ABC$ .
2. Calculer les coordonnées de l'orthocentre  $H$  du triangle  $ABC$ .
3. Calculer les coordonnées du centre du cercle circonscrit  $O$  du triangle  $ABC$ .

4. Vérifier que  $\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{OG}$ .
5. Montrer que les symétriques de  $H$  par rapport aux côtés du triangle appartiennent à son cercle circonscrit.
6. Montrer que les symétriques de  $H$  par rapport aux milieux du triangle appartiennent également à son cercle circonscrit.

### Exercice 6 (\*)

Déterminer toutes les équations possibles (cartésienne, paramétrique, normale) de chacune des droites suivantes :

- droite d'équation cartésienne  $2x - y + 3 = 0$ .
- droite passant par les points  $A(1; 2)$  et  $B(5; 10)$ .
- droite orthogonale à la précédente et passant par  $C(-1, 3)$ .
- droite passant par  $D(1, 1)$  et ayant pour vecteur normal  $\vec{n}(1, -2)$ .

### Exercice 7 (\*\*)

On se place dans un repère orthonormal du plan. Pour tout réel  $a$ , on définit la droite  $D_a$  d'équation  $(1 - a^2)x + 2ay + (a^2 - 2a - 3) = 0$ . Déterminer tous les points par lesquels passe au moins une droite de la famille. Déterminer tous les points par lesquels passent deux droites perpendiculaires de la famille.

### Exercice 8 (\*)

Dans un repère orthonormal direct, on considère les points  $A(-1, -1)$ ,  $B(2, 3)$  et  $C(3, -3)$ .

1. Calculer l'aire du triangle  $ABC$ .
2. En déduire la distance de  $A$  à la droite  $(BC)$ .
3. Déterminer une équation de la droite  $(AB)$ .
4. En déduire la longueur de la hauteur issue de  $C$ , et retrouver ainsi l'aire du triangle  $ABC$ .

### Exercice 9 (\*\*\*)

On considère trois points non alignés dans le plan, et une droite  $(d)$  coupant respectivement les droites  $(BC)$ ,  $(AC)$  et  $(AB)$  en  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ . Par le point  $A'$ , on mène les parallèles à  $(AB)$  et  $(AC)$  qui coupent respectivement en  $D$  et  $E$  la parallèle à  $(BC)$  passant par  $A$ . On souhaite prouver que les droites  $(B'D)$  et  $(C'E)$  sont parallèles, et on se place pour cela dans le repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ .

1. Faire une figure.
2. Que peut-on dire des coordonnées de  $B'$  et de  $C'$  dans le repère choisi ?
3. Déterminer en fonction de ces coordonnées une équation de  $(d)$ , de  $(BC)$ , puis les coordonnées des points  $A'$ ,  $D$  et  $E$ .
4. Conclure à l'aide d'un calcul de déterminant.

### Exercice 10 (\*\*)

Soit  $ABC$  un triangle tel que  $AB = a$ ,  $BC = 2a$  et  $AC = a\sqrt{3}$ .

1. Que peut-on dire du triangle  $ABC$  ?
2. Déterminer  $\{M \mid -4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 6a^2\}$ .
3. Déterminer  $\{M \mid -4MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 0\}$ .

### Exercice 11 (\*\*)

Dans un repère orthonormal direct, on définit la droite  $D$  par l'équation  $x + y + 1 = 0$  et, pour tout réel  $\lambda$ , le cercle  $\mathcal{C}_\lambda$  d'équation  $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2y + 2 = 0$ . Décrire le cercle  $\mathcal{C}_\lambda$  en fonction du paramètre  $\lambda$  puis étudier l'intersection de  $D$  et de  $\mathcal{C}_\lambda$ .

### Exercice 12 (\*)

Dans un repère orthonormal, on considère pour un réel  $\lambda > 0$  les deux cercles de centre  $(\lambda, 0)$  tangent à l'axe  $(Oy)$  et de centre  $(\lambda, \lambda)$  tangent à l'axe  $(Ox)$ . Déterminer les coordonnées des points d'intersection de ces cercles, et leur lieu lorsque  $\lambda$  décrit  $\mathbb{R}^{+*}$ .

### Exercice 13 (\*\*)

Soit  $\mathcal{C}$  le cercle d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ , et  $A(4; -4)$ . On peut mener par le point  $A$  deux tangentes au cercle  $\mathcal{C}$ . Calculer la distance entre les points d'intersection de ces tangentes et de  $\mathcal{C}$ .

### Exercice 14 (\*\*\*)

On utilise dans ce problème la notation  $\overline{AB}$  pour désigner la mesure algébrique du segment  $[AB]$ . Soit  $\mathcal{C}$  un cercle du plan de centre  $O$  et de rayon  $R$ , et  $M$  un point du plan, on appelle alors puissance de  $M$  par rapport à  $\mathcal{C}$  le réel  $p_{\mathcal{C}}(M) = OM^2 - R^2$ .

1. Supposons que  $M$  appartienne à une droite  $D$  coupant  $\mathcal{C}$  en deux points  $A$  et  $B$ . On note  $A'$  le point diamétralement opposé à  $A$  sur  $\mathcal{C}$ , montrer que  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MA'} \cdot \overline{MA} = p_{\mathcal{C}}(M)$ .
2. Supposons  $M$  extérieur au cercle  $\mathcal{C}$  et notons  $S$  et  $T$  les points de contact de  $\mathcal{C}$  avec ses tangentes issues de  $M$ . Indiquer une méthode pour construire  $S$  et  $T$  à la règle et au compas.
3. Montrer que  $MT^2 = MS^2 = p_{\mathcal{C}}(M)$ .
4. Montrer que quatre points  $A, B, C$  et  $D$  tels que  $(AB)$  et  $(CD)$  ne soient pas parallèles (elles se coupent alors en un point noté  $N$ ) sont cocycliques si et seulement si  $\overline{NA} \cdot \overline{NB} = \overline{NC} \cdot \overline{ND}$ .
5. On considère désormais deux cercles non concentriques  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ , de centres respectifs  $O$  et  $O'$  et on note  $\Delta$  l'ensemble des points  $M$  vérifiant  $p_{\mathcal{C}}(M) = p_{\mathcal{C}'}(M)$ .
  - (a) Soit  $I$  le milieu de  $[OO']$ , montrer que  $M \in \Delta \Leftrightarrow \overline{OO'} \cdot \overline{IM} = k$ , où  $k$  est une constante à préciser.
  - (b) En déduire la nature de  $\Delta$  (appelée axe radical des deux cercles).
  - (c) Déterminer l'axe radical de deux cercles dans le cas où ils sont sécants en deux points  $A$  et  $B$ .
  - (d) Déterminer l'axe radical de deux cercles quand ils sont tangents en un point  $A$ .
  - (e) Justifier que si trois cercles  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  et  $\mathcal{C}''$  ont des leurs centres  $O, O'$  et  $O''$  non alignés, les trois axes radicaux définis à partir de ces trois cercles sont concourants en un point  $R$ , appelé centre radical des trois cercles.
  - (f) Décrire une construction géométrique de l'axe radical de deux cercles disjoints, faisant intervenir un troisième cercle sécant aux deux premiers.