Feuilles d'exercices n°2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

21 septembre 2015

Vrai-Faux

1. C'est faux, au contraire, elle est inférieure quand x est négatif.
2. Faux, ça devrait être $f'(f^{-1}(x))$ au dénominateur.
3. Encore faux, si $a < 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est décroissante.
4. Vrai !
5. Encore vrai !

Exercice 1 (*)

1. Il faut résoudre l'inéquation $2x^2 - 3x - 2 \geqslant 0$. Le trinome correspondant a pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, donc admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{3+5}{4} = 2$ et $x_2 = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2}$. Le trinome étant positif en-dehors des racines, $\mathcal{D}_f = \left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty[$.
2. L'exponentielle est là pour faire joli, ce qui est important c'est d'avoir $x + 5 > 0$, soit $x > -5$, donc $\mathcal{D}_f =]-5; +\infty[$.
3. Le dénominateur interdit les valeurs -2 et 2. Reste à vérifier quand le numérateur est positif. C'est le cas en-dehors de ses racines 0 et -1, donc $\mathcal{D}_f =]-\infty; -2[\cup]-2; 0] \cup [1; 2[\cup]2; +\infty[$.
4. Il faut déterminer quand $x^5 + 1 > 0$, autrement dit quand $x^5 > -1$. Or, on sait que $x \mapsto x^5$ est une fonction strictement croissante, et que $(-1)^5 = -1$, donc $x^5 > -1 \Leftrightarrow x > -1$ et $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$.

Exercice 2 (* à **)

1. La fonction f est paire (elle est somme de fonctions puissances paires).
2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et paire puisque $\forall x \neq 0$, $f(-x) = \ln(|-x|) = \ln(|x|) = f(x)$.
3. Cette fonction très laide est paire : elle est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$ (ce qui est sous la racine est toujours strictement positif ; par contre les trois valeurs enlevées annulent le premier dénominateur) et $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = \dfrac{1}{((-x)^3 - 2 \times (-x))^2} \times \dfrac{(-x)^4}{\sqrt{(-x)^2 + 2}} = \dfrac{1}{(2x - x^3)^2} \times \dfrac{x^4}{\sqrt{x^2+2}} = f(x)$ car $(2x - x^3)^2 = (x^3 - 2x)^2$ (prendre la carré d'un nombre ou de son opposé donne toujours le même résultat).
4. Cette fonction est définie sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, et elle est paire : $f(-x) = |2(-x)^2 - e^{(-x)^4} + \ln((-x)^2 - 1)| = |2x^2 - e^{x^4} + \ln(x^2 - 1)| = f(x)$.
5. Cette dernière fonction est définie sur $]-1; 1[$, et elle est impaire : $f(-x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = -\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$ (on a simplement utilisé le fait que $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln b$).

Exercice 3 (** à ***)

1. En posant $X = x^2$, on se ramène à l'équation $X^2 + X - 20 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 80 = 81$, donc admet deux racines $X_1 = \dfrac{-1+9}{2} = 4$ et $X_2 = \dfrac{-1-9}{2} = -5$. La valeur -5 est à éliminer pour x^2, donc on a nécessairement $x^2 = 4$, d'où $\mathcal{S} = \{-2; 2\}$.
2. L'inéquation est définie lorsque $x + 2$ et $3x - 6$ sont tous deux strictement positifs, donc pour $x > 3$. Elle revient alors à $\ln \dfrac{x+2}{2x-6} \leqslant \ln 2$, soit $\dfrac{x+2}{2x-6} \leqslant 2$, donc $\dfrac{-3x+14}{2x-6} \leqslant 0$. Comme $2x - 6$ a déja été supposé positif, $\mathcal{S} = \left[\dfrac{14}{3}; +\infty\right[$.
3. En faisant tout passer à gauche, on se ramène à $\dfrac{-5x-11}{x^3+2x^2-5x-6} \geqslant 0$. Le signe du numérateur est facile à obtenir, mais pour le dénominateur il faut commencer par le factoriser. On constate que -1 est racine du dénominateur : $(-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6 = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$. On peut donc écrire $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$. Par identification des coefficients, on a $a = 1$, $b = 1$ et $c = -6$, donc $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x^2 + x - 6)$. Le dernier facteur a pour discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$ et admet deux racines $x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3$. On peut désormais faire un gros tableau de signes :

x		-3		$-\frac{11}{5}$		-1		2	
$-5x-11$	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$
x^3+2x^2-5x-6	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$
Q	$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$

Conclusion : $\mathcal{S} = \left]-3; -\dfrac{11}{5}\right] \cup]-1; 2[$.

4. Commençons par constater que l'inéquation ne peut avoir de sens que si $x \geqslant -2$. Lorsque $x \in [-2; 1]$, l'inéquation sera certainement vérifiée puisque le membre de gauche est alors négatif, et le membre de droite positif. Reste le cas $x > 1$, où on peut se permettre de tout élever au carré puisque les deux membres de l'inégalité sont alors positifs : on obtient $x^2 - 2x + 1 \leqslant x + 2$, soit $x^2 - 3x - 1 \leqslant 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 9 + 4 = 13$, et s'annule donc en deux valeurs $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$. Le trinome est négatif entre ses racines, donc sur l'intervalle $[x_1; x_2]$. Comme $x_1 < 1$ et $x_2 > 1$, on en déduit concernant notre inéquation initiale que $\mathcal{S} = \left[-2; \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$.
5. Commençons par remarquer que l'équation n'est définie que sur l'intervalle $]1; +\infty[$. Avant de passer à l'exponentielle, il est indispensable de regrouper les deux *ln* de gauche pour n'avoir qu'un seul *ln* de chaque côté, ce qui donne $\ln(x^2 + 2x - 3) = \ln 4$, donc $x^2 + 2x - 7 = 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 4 + 28 = 32$, et admet donc deux racines $x_1 + \dfrac{-2+4\sqrt{2}}{2} = -1 + 2\sqrt{2}$, et $x_2 = -2 - 2\sqrt{2}$. La deuxième solution n'appartient pas à l'intervalle de définition, donc $\mathcal{S} = \{2\sqrt{2} - 1\}$.
6. Tout étant positif, on peut passer au ln : $3 \times 2^{3x-4} \geqslant 2^4 \Leftrightarrow \ln 3 + (3x-4)\ln 2 \geqslant 4 \ln 2$, soit $(3x - 8)\ln 2 \geqslant -\ln 3$, donc $x \geqslant \dfrac{8\ln 2 - \ln 3}{3 \ln 2}$, donc $\mathcal{S} = \left[\dfrac{8\ln 2 - \ln 3}{3\ln 2}; +\infty\right[$.
7. Commençons pas signaler que l'inéquation n'a de sens que si $2x - 3 > 0$, soit $x > \dfrac{3}{2}$. Ensuite c'est très simple : puisque la fonction ln est strictement croissante, $\ln(2x-3) \leqslant \ln 5 \Leftrightarrow 2x - 3 \leqslant 5 \Leftrightarrow x \leqslant 4$, donc $\mathcal{S} = \left]\dfrac{3}{2}; 4\right[$.

8. En faisant passer quelques termes à droite, on obtient $2^{3x-1} = 5^{x+1} - 5^x = 5^x(5-1) = 4\times 5^x$, soit en prenant le ln des deux côtés $(3x-1)\ln 2 = \ln 4 + x\ln 5$, donc $x(3\ln 2 - \ln 5) = 3\ln 2$, et $x = \dfrac{3\ln 2}{3\ln 2 - \ln 5}$, donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3\ln 2}{3\ln 2 - \ln 5}\right\}$.
9. Cette équation n'a de sens que si $x > 0$ (on peut éventuellement extrapoler que 0 va aussi être solution de l'équation, si on arrive à donner un sens à 0^0). En prenant les ln, on obtient alors $\sqrt{x}\ln x = x\ln(\sqrt{x}) = x\dfrac{\ln x}{2}$, donc $\ln x\left(\sqrt{x} - \dfrac{x}{2}\right) = 0$. On en déduit que soit $\ln x = 0$, c'est-à-dire $x = 1$, soit $\sqrt{x} = \dfrac{x}{2}$, auquel cas on obtient en élevant au carré (on peut, tout est positif) $x = \dfrac{x^2}{4}$, soit $x(x-4) = 0$, donc $x = 4$ (0 ayant été exclu dès le départ). Conclusion : $\mathcal{S} = \{1; 4\}$.
10. Celle-ci est un piège assez vicieux. On ne sait pas vraiment résoudre ce genre d'équation, mais on peut constater que $x \mapsto x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3$ est une fonction strictement croissante sur son domaine de définition $]0; +\infty[$, et qu'elle prend pour valeur 0 en 1. Elle ne peut donc pas s'annuler plus d'une fois et $\mathcal{S} = \{0\}$.
11. Ca doit presque être un réflexe pour ce genre d'équations : on pose $X = e^{-2x}$ et on obtient $X^3 + 3X^2 - X - 3 = 0$. On constate (comme d'habitude) que 1 est racine évidente de l'équation, et on peut donc écrire $(X^3 + 3X^2 - X - 3) = (X-1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X - c$, soit après identification $a = 1$; $b = 4$ et $c = 3$. Reste à résoudre $X^2 + 4X + 3 = 0$, équation ayant pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$ et pour racines réelles $X_1 = \dfrac{-4+2}{2} = -1$ et $X_2 = \dfrac{-4-2}{2} = -3$. Ces deux dernières valeurs n'étant pas très compatibles avec le changement de variable effectué, la seule possibilité restante est $e^{-2x} = 1$, ce qui donne $x = 0$, donc $\mathcal{S} = \{0\}$.
12. Posons $X = 8^{3x}$, on cherche alors à résoudre $X^2 - 3X - 4 \leqslant 0$, inéquation ayant pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, soit deux racines réelles $X_1 = \dfrac{3-5}{2} = -1$ et $X_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4$. On doit donc avoir $-1 \leqslant 8^{3x} \leqslant 4$. La première inégalité est toujours vérifiée, puisque la puissance est nécessairement positive. Quant à la deuxième, elle devient, en passant au ln, $3x\ln 8 \leqslant \ln 4$, soit $x \leqslant \dfrac{\ln 8}{3\ln 4}$. Comme $\dfrac{\ln 4}{3\ln 8} = \dfrac{2\ln 2}{9\ln 2} = \dfrac{2}{9}$, on a donc $\mathcal{S} = \left]-\infty; \dfrac{2}{9}\right]$.
13. La deuxième équation du système peut se traduire par $\log(xy) = 4$, soit, en passant à l'exponentielle de base 10, $xy = 10^4 = 10\ 000$. Les réels x et y sont alors solutions de l'équation $x^2 - 520x + 10\ 000 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 520^2 - 40\ 000 = 230\ 400$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{520-480}{2} = 20$ et $x_2 = \dfrac{520+480}{2} = 500$ (notez qu'on peut facilement vérifier que ces deux nombres sont solutions du problème posé). On a donc $\mathcal{S} = \{(20; 500); (500; 20)\}$.
14. On se contente de tout écrire à l'aide des exponentielles. Quitte à tout multiplier par 2, cela donne $4(e^x + e^{-x}) + 3(e^x - e^{-x}) - 8 = 0$, soit $7e^x - 8 + e^{-x} = 0$. En posant $X = e^x$ (et en multipliant tout par e^x, on se ramène à l'équation du second degré $7X^2 - 8X + 1 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 64 - 28 = 36$, et ses solutions sont $X_1 = \dfrac{8+6}{14} = 1$ et $X_2 = \dfrac{8-6}{14} = \dfrac{1}{7}$. On trouve donc deux solutions à l'équation initiale : $x = \ln(1) = 0$, et $x = -\ln(7)$.

Exercice 4 (**)

1. La fonction $x \mapsto -2x + 3$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et l'exponentielle est strictement croissante, donc la composée $x \mapsto e^{-2x+3}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est à valeurs dans $]0; +\infty[$ (une exponentielle est toujours positive), intervalle sur lequel la fonction inverse est décroissante. Conclusion : $x \mapsto \dfrac{1}{e^{-2x+3}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme

on multiplie ceci par $-\frac{5}{2}$, le sens de variation change encore une fois, et f est finalement décroissante sur $\mathbb{R}$.

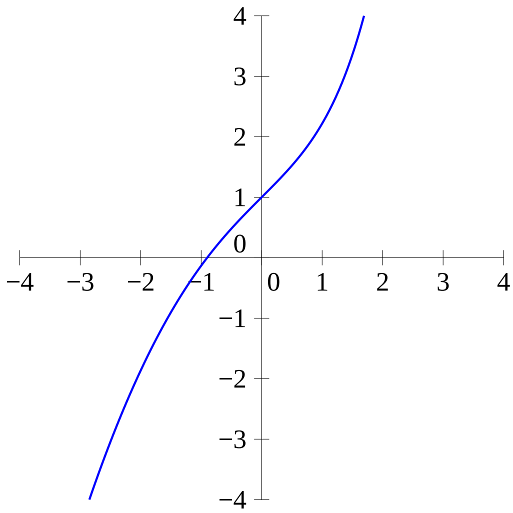
2. Soustraire 3 à la fin ne changera pas le sens de variation, concentrons-nous donc sur le carré. La fonction $x \mapsto e^x + 2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives, et la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Cette fois-ci c'est différent, car $e^x - 3$ ne prend pas toujours des valeurs positives. Plus précisément $e^x - 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \ln 3$. Sur $]-\infty; \ln 3]$, $x \mapsto e^x - 3$ est donc croissante et à valeurs dans $]-\infty; 0]$, intervalle sur lequel la fonction carré est décroissante. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty; \ln 3]$. Sur $[\ln 3; +\infty[$, $x \mapsto e^x - 3$ est croissante et à valeurs positives, et cette fois f sera strictement croissante.
4. Commençons par constater que f n'est pas définie partout : $e^{-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1 \Leftrightarrow x < e$. Ensuite, la fonction $x \mapsto -x$ étant strictement décroissante sur $]e; +\infty[$, et les fonctions exponentielle et ln strictement croissantes sur leurs ensembles de définition, on en déuit facilement que f est strictement décroissante sur $]e; +\infty[$
5. Notre dernière fonction est définie si $\frac{x+1}{x-1} > 0$, soit $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ (un petit tableau de signe pour le vérifier). Pour obtenir son sens de variations, il peut être utile de faire la petite modification suivante : $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{x-1+2}{x-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)$. La fonction $x \mapsto \frac{2}{x-1}$ étant strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$, et le logarithme népérien étant strictement croissant sur son ensemble de définition, la fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$, ainsi que sur $]1; +\infty[$.

Exercice 5 (* à ***)

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = e^x - x$ et de dérivée seconde $f''(x) = e^x - 1$. La fonction f'' s'annule en 0, donc on obtient pour f' le tableau de variations suivant :

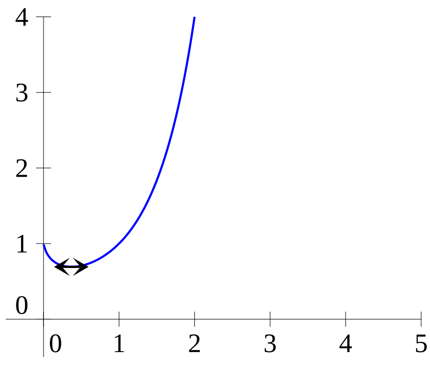
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

(les limites ne posent pas de difficulté de calcul). Comme $1 > 0$, f' est toujours strictement positive, et f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Les limites de f se calculent elles aussi assez facilement : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée ici), et en $+\infty$, on peut écrire $f(x) = e^x\left(1 - \frac{x^2}{2e^x}\right)$, où la parenthèse a pour limite 1 par croissance comparée, donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Pour tracer à la main une courbe représentative correcte, il faudrait calculer quelques points car on manque cruellement d'informations. On peut toujours constater que $f(0) = 1$. En tout cas, la courbe ressemble à ceci :



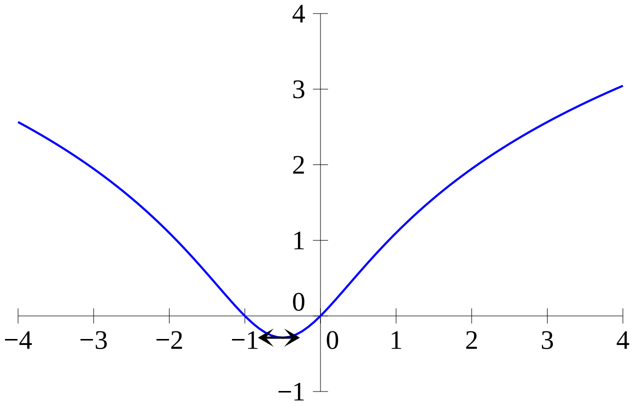
2. La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$, et on peut l'écrire sous forme exponentielle $f(x) = e^{x\ln x}$. Elle a donc pour dérivée $f'(x) = (\ln x + 1)e^{x\ln x}$. Cette dérivée s'annule lorsque $\ln x = -1$, c'est-à-dire pour $x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$, et f est donc décroissante sur $\left]0;\dfrac{1}{e}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{e};+\infty\right[$. On peut calculer les limites de f : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ (croissance comparée), donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (pas de problème pour celle-là). Après avoir calculé $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}}$, on obtient le tableau de variations et la courbe suivants :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f	1	↘	$e^{-\frac{1}{e}}$	↗	$+\infty$



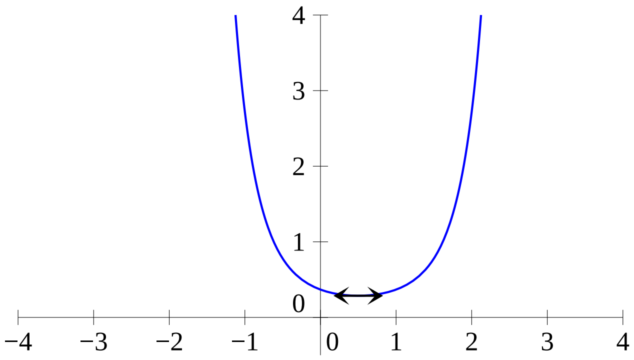
3. Intéressons-nous pour commencer au domaine de définition de f, et cherchons pour cela les racines du trinome $1 + x + x^2$. Il a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$, donc est toujours du signe de 1, à savoir positif. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$. Elle a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{1 + 2x}{(1 + x + x^2)^2}$, qui s'annule pour $x = -\dfrac{1}{2}$. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1 + x + x^2 = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, et de plus $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{3}{4} = \ln 3 - \ln 4$, d'où le tableau et la courbe suivants :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 3 - \ln 4$	$\nearrow$	$+\infty$



4. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x-1}$, qui s'annule pour $x = \frac{1}{2}$. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 - x - 1 = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. De plus $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{5}{4}}$, d'où le tableau et la courbe suivants :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$e^{-\frac{5}{4}}$	$\nearrow$	$+\infty$



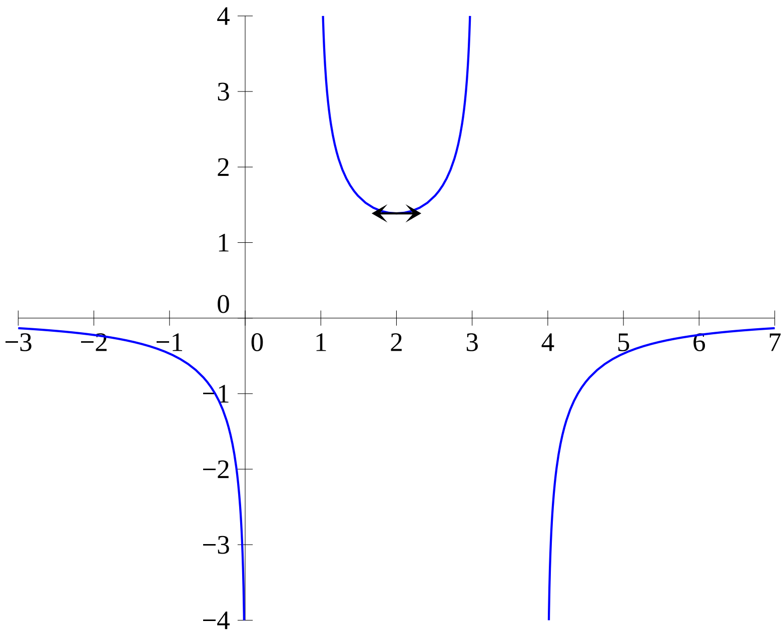
5. Il faut commencer par déterminer le domaine de définition de f, et pour cela faire un joli tableau de signes. Le dénominateur a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet donc deux racines réelles $x_1 = \frac{4+2}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{4-2}{2} = 1$ (pour le numérateur, la factorisation par x rend les racines évidentes). D'où le tableau :

x		0		1		3		4	
x^2-4x	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$
x^2-4x+3	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$
$\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$	$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$

On a donc $\mathcal{D}_f =]-\infty; 0[\cup]1; 3[\cup]4; +\infty[$. Sur cet ensemble, f a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{(2x-4)(x^2-4x+3)-(2x-4)(x^2-4x)}{(x^2-4x+3)^2} \times \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x} = \dfrac{3(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} \times \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x} = \dfrac{6(x-2)}{(x^2-4x)(x^2-4x+3)}$. Le dénominateur étant strictement positif sur $\mathcal{D}_f$ (c'est un produit au lieu d'un quotient, mais le tableau de signes est exactement celui qu'on a fait ci-dessus), f' est du signe de $x-2$. Par ailleurs, $f(2) = \ln \dfrac{-4}{-1} = 2\ln 2$

Restent quelques limites un peu pénibles à calculer. Les plus faciles sont les limites en 0 et en 4 : quand le numérateur s'annule, le quotient à l'intérieur du ln tend vers 0, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = -\infty$. En 1 et 3, c'est à peine plus compliqué : le dénominateur s'annule donc le quotient tend vers $+\infty$ (ça ne peut pas être $-\infty$ puisque f ne serait pas définie si le quotient prenait des valeurs négatives), et on en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$. Enfin, vos souvenirs sur le calculs de limites de Terminale devraient vous permettre de vérifier que la limite du quotient en $\pm\infty$ vaut 1 (on factorise par x^2 en haut et en bas), d'où $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Ce qui nous donne un tableau et une courbe ressemblant à ceci :

x	$-\infty$		0	1		2		3	4		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ||	|| $+\infty$	$\searrow$	$2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$ ||	|| $-\infty$	$\nearrow$	0

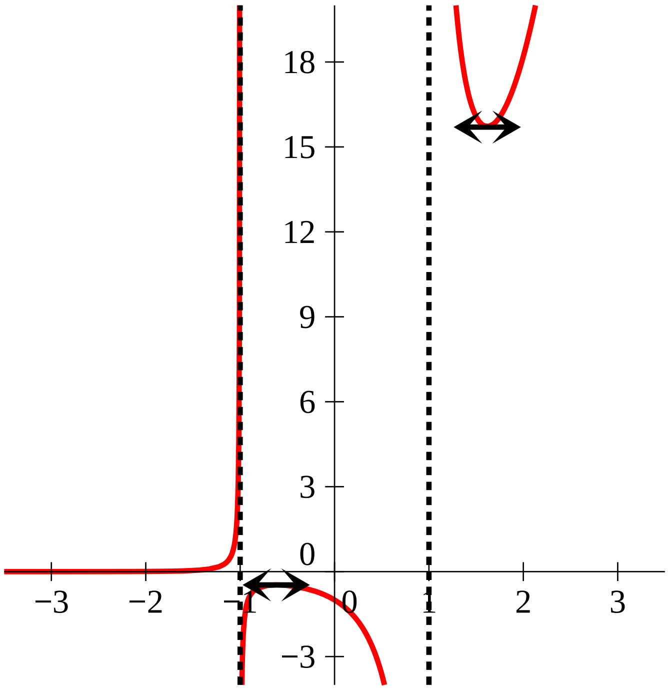


6. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}(x^2-1)-2xe^{2x}}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2e^{2x}(x^2-x-1)}{(x^2-x-1)^2}$. Cette dérivée est du signe de x^2-x-1, trinome dont le discriminant vaut $\Delta = 1+4 = 5$, qui s'annule en deux valeurs $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (qui est compris entre -1 et 1) et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (qui est plus grand que 1). La fonction f admet donc un maximum en x_1 et un minimum en x_2, dont on ne cherchera exceptionnellement pas à expliciter les va-

leurs car ça ne se simplifie vraiment pas. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; et sans croissance comparée, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$. Comme par ailleurs e^{2x} est strictement positif, et x^2-1 est positif en-dehors de ses racines, on trouve $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$.

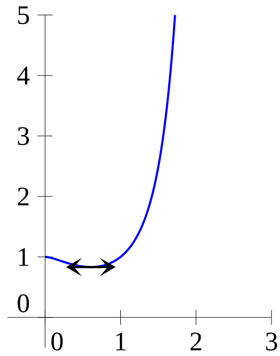
x	$-\infty$		-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe n'est ici pas très pratique à tracer sur une feuille, le minimum étant à une hauteur assez élevée.

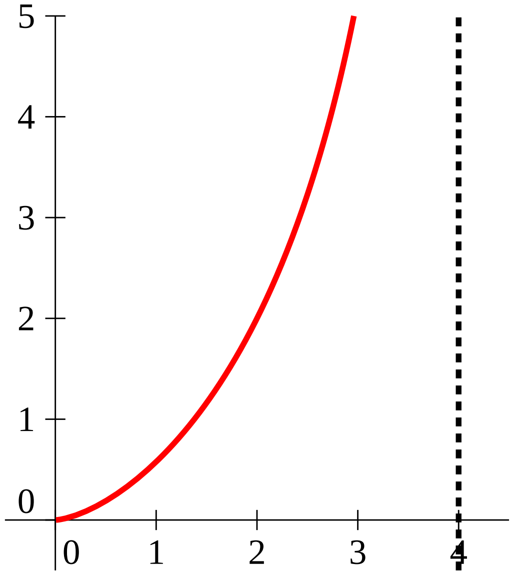


7. Cette fonction est définie sur $]0;+\infty[$, et s'écrit sous forme exponentielle $f(x) = e^{x^2\ln x}$. Elle a pour dérivée $f'(x) = (2x\ln x + x)e^{x^2\ln x} = x(2\ln x + 1)e^{x^2\ln x}$. Le facteur x est toujours strictement positif sur $\mathcal{D}_f$, seul compte donc le signe de $2\ln x + 1$. Ceci s'annule pour $x = e^{-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Le calcul des limites est extrêmement similaire à celui de la deuxième fonction de l'exercice, au point d'ailleurs que les limites sont les mêmes, on a $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = e^{-\frac{1}{2e}}$ et on obtient tableau et courbe :

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{2e}}$	$\nearrow$	$+\infty$



8. La fonction f est définie si $\dfrac{x^3}{2a-x} \geqslant 0$, soit lorsque $x \in [0; 2a[$. La fonction vérifie évidemment $f(0) = 0$, et $\lim\limits_{x \to 2a} f(x) = +\infty$. La fonction racine carrée étant croissante, f a les mêmes variations que $x \mapsto \dfrac{x^3}{2a-x}$, qui a pour dérivée $\dfrac{3x^2(2a-x)+x^3}{(2a-x)^2} = \dfrac{6ax^2-2x^3}{(2a-x)^2} = \dfrac{2x^2(3a-x)}{(2a-x)^2}$, toujours positive sur $[0; 2a]$. La fonction f est donc strictement croissante, et on n'a pas grand chose de plus à dire sur cette fonction ! Un exemple de courbe lorsque $a = 2$:



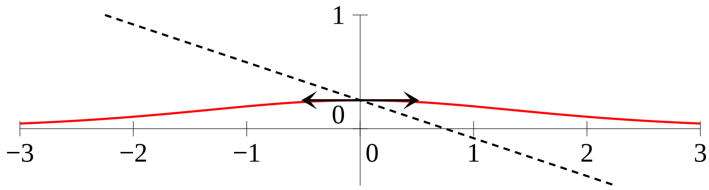
Exercice 6 (**)

1. Le dénominateur de f ne s'annulant jamais (puisque $e^x + 1$ est toujours strictement positif), $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Comme $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-2x}(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} = f(x)$, la fonction f est paire.
3. Quand x tend vers $-\infty$, le numérateur de f tend vers 0 et son dénominateur vers 1, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. La fonction étant paire, on aura aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (ce qu'on peut retrouver par un calcul direct, par exemple en développant le dénominateur et en factorisant tout par e^x).
4. Calculons donc : $f'(x) = \dfrac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \dfrac{e^x(1+e^x) - 2e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \dfrac{e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^3} =$

$\dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. Le dénominateur de cette dérivée est toujours positif, le signe du numérateur dépend uniquement de celui de $1-e^x$, qui est positif quand $e^x \leqslant 1$, c'est-à-dire quand $x \leqslant 0$. D'où le tableau de variations suivant ($f(0) = \dfrac{1}{(1+1)^2} = \dfrac{1}{4}$) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	
	0				0

5. Puisque $e^{\ln 2} = 2$, on a $f(\ln 2) = \dfrac{2}{(1+2)^2} = \dfrac{2}{9}$, et $f'(\ln 2) = \dfrac{2(1-2)}{(1+2)^3} = -\dfrac{2}{27}$. L'équation de la tangente est donc $y = -\dfrac{2}{27}(x - \ln 2) + \dfrac{2}{9} = -\dfrac{2}{27}x + \dfrac{2}{9}\left(1 + \dfrac{\ln 2}{3}\right)$.
6. Le fait que $f'(x)$ soit négatif sur cet intervalle a déjà été vu. De plus, $f'(x) + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3e^x(1-e^x) + (1+e^x)^3}{(1+e^x)^3} = \dfrac{3e^x - 3e^{2x} + 1 + 3e^x + 3e^{2x} + e^{3x}}{(1+e^x)^3} = \dfrac{1 + 6e^x + e^{3x}}{(1+e^x)^3} \geqslant 0$, d'où la deuxième inégalité demandée.
7. Posons $a(x) = f(x) + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{4}$. Comme $a'(x) = f'(x) + \dfrac{1}{3} \geqslant 0$, la fonction a est croissante sur $[0; +\infty[$. Or, $a(0) = f(0) - \dfrac{1}{4} = 0$, donc la fonction a prend des valeurs positives sur $[0; +\infty[$, ce qui revient à ce qu'on voulait prouver.
8. Voici les courbes, avec la droite en pointillés :



Problème

I. Étude de f et de sa réciproque.

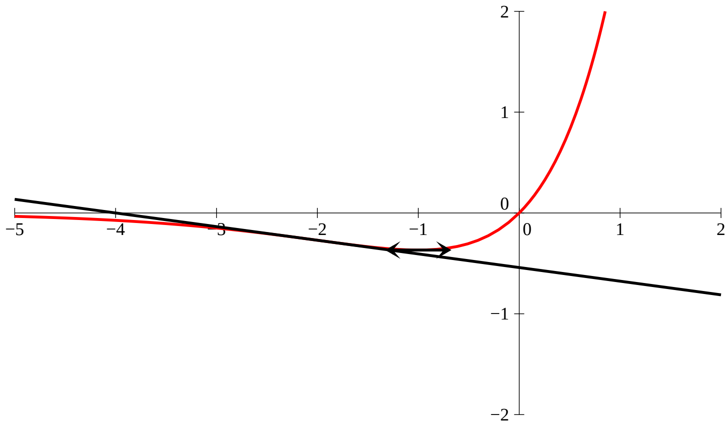
1. La fonction f a pour dérivée $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$. La fonction admet donc un minimum en -1, de valeur $f(-1) = -\dfrac{1}{e}$. Sans difficulté, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, et en appliquant directement un résultat de croissance comparée, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
2. (a) La fonction f' est dérivable, de dérivée $f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$. Elle s'annule effectivement une seule fois, en $\alpha = -2$.

   (b) Puisque $f(-2) = -\dfrac{2}{e^2}$ et $f'(-2) = -\dfrac{1}{e^2}$, la tangente a pour équation $y = -\dfrac{1}{e^2}(x+2) - \dfrac{2}{e^2} = -\dfrac{1}{e^2}(x+4)$. Elle coupe l'axe des abscisses pour $x = -4$.

   (c) On cherche donc à étudier le signe de $f(x) + \dfrac{1}{e^2}(x+4) = xe^x + \dfrac{1}{e^2}(x+4)$. Cette expression a la même dérivée seconde que f, sa dérivée $(x+1)e^x + \dfrac{1}{e^2}$ est donc décroissante sur

$]-\infty;-2]$ et croissante sur $[-2;+\infty[$. Comme elle vaut $-\dfrac{1}{e^2}+\dfrac{1}{e^2}=0$ en -2, elle est donc toujours positive. L'expression $f(x)+\dfrac{1}{e^2}(x+4)$ est croissante sur $\mathbb{R}$, elle s'annule également en $x=-2$ (puisque la tangente y coupe la courbe représentative de f), on en déduit que la tangente est au-dessus de la courbe sur $]-\infty;-2]$, et en-dessous sur $[-2;+\infty[$.

3. Voici une allure de courbe :



4. La fonction f étant continue et strictement croissante sur $[-1;+\infty[$, elle y est bijective vers son intervalle image $\left[-\dfrac{1}{e};+\infty\right[$. Le théorème de la bijection donne directement le tableau de variations de g :

x	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$
f	-1 $\nearrow$	$+\infty$

5. En utilisant la formule de dérivation d'une réciproque, $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}=\dfrac{1}{(g(x)+1)e^{g(x)}}$. Or, par définition, la fonction g vérifie $g(x)e^{g(x)}=x$. On peut donc écrire, lorsque $x\neq 0$, $e^{g(x)}=\dfrac{x}{g(x)}$, et $g'(x)=\dfrac{g(x)}{x(g(x)+1)}$. En particulier, la fonction g est solution de l'équation différentielle $xy'(y+1)=y$.
6. En effet, cette équation s'écrit $e^{x\ln(2)}=x$, soit en multipliant chaque membre par $\ln(2)$, $\dfrac{x\ln(2)}{e^{x\ln(2)}}=\ln(2)$, donc $-x\ln(2)e^{-x\ln(2)}=-\ln(2)$. Autrement dit $f(-x\ln(2))=-\ln(2)$, ce qui équivaut à $-x\ln(2)=g(-\ln(2))$, soit $x=-\dfrac{g(-\ln(2))}{\ln(2)}$.
7. On peut écrire l'équation sous la forme $e^{x\ln(x)}=3$, soit $x\ln(x)=\ln(3)$. En posant $X=\ln(x)$, on se ramène à l'équation $f(X)=\ln(3)$, soit $X=g(\ln(3))$. On a donc $\ln(X)=e^{g(\ln(3))}$, soit $x=e^{g(\ln(3))}$.

II. Des fonctions auxiliaires.

1. La fonction h_a est évidemment dérivable, de dérivée $h_a'(x)=-e^{-x}+2ax=e^{-x}(-1+2af(x))$, qui est du signe de $2af(x)-1$. Elle s'annule lorsque $f(x)=\dfrac{1}{2a}$ (valeur atteinte une unique fois par la fonction f), autrement dit en $m_a=g\left(\dfrac{1}{2a}\right)$. Son image par la fonction h est

$h_a(m_a) = e^{-g(\frac{1}{2a})} + a\left(g\left(\frac{1}{2a}\right)\right)^2 = e^{-m_a} + am_a^2$. Or, par définition, $m_a = g\left(\frac{1}{2a}\right)$ implique $f(m_a) = \dfrac{1}{2a}$, soit $m_a e^{m_a} = \dfrac{1}{2a}$, donc $e^{-m_a} = 2am_a$, et $h_a(m_a) = 2am_a + am_a^2 = am_a(m_a+2)$.

2. Puisque $i(a) = g\left(\dfrac{1}{2a}\right)$, que $a \mapsto \dfrac{1}{2a}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, et que g est croissante sur son domaine de définition, i est une fonction décroissante. Par simple composition de limite, $\lim\limits_{a\to+\infty} i(a) = g(0) = 0$, et $\lim\limits_{a\to 0^+} i(a) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
3. Il suffit de constater que, si $a < b$, on aura $h_a(x) < h_b(x)$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, $h_a(m_b) < h_b(m_b)$. Comme m_a est le minimum de la fonction h_a, on a également $h_a(m_a) \leqslant h_a(m_b)$, dont on déduit que $h_a(m_a) < h_b(m_b)$. La valeur du maximum est donc une fonction strictement croissante de la variable a. Reste à déterminer la limite quand a tend vers $+\infty$ de $am_a(m_a+2)$. On sait déjà que $\lim\limits_{a\to+\infty} m_a = 0$, donc $\lim\limits_{a\to+\infty} m_a + 2 = 2$. De plus, $am_a = \dfrac{1}{2}e^{-m_a}$, qui a pour limite $\dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{a\to+\infty} h_a(m_a) = 1$.